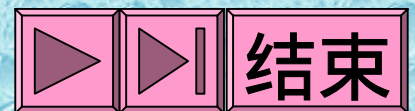


# 车灯线光源 的优化设计模型

---

制作：周寅亮

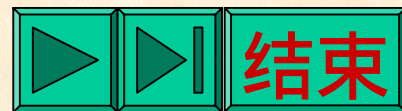
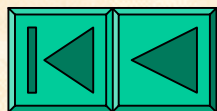


## 问题

安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面，车灯的对称轴水平地指向正前方，其开口半径 36 毫米，深度 21.6 毫米。经过车灯的焦点，在与对称轴相垂直的水平方向，对称地放置一定长度的均匀分布的线光源。要求在某一设计规范标准下确定线光源的长度。

该设计规范在简化后可描述如下。在焦点  $F$  正前方 25 米处的  $A$  点放置一测试屏，屏与  $FA$  垂直，用以测试车灯的反射光。在屏上过  $A$  点引出一条与地面相平行的直线，在该直线  $A$  点的同侧取  $B$  点和  $C$  点，使  $AC=2AB=2.6$  米。要求  $C$  点的光强度不小于某一额定值（可取为 1 个单位）， $B$  点的光强度不小于该额定值的两倍（只须考虑一次反射）。

(1) 在满足该设计规范的条件条件下，计算线光源长度，使线光源的功率最小。





建立坐标系如图 1，记线光源长度为  $l$ ，功率为  $W$ ，B,C 点的光强度分别为  $h_B(l)W$  和  $h_C(l)W$ ，先求能量密度  $h_B(l)$  和  $h_C(l)$  的表达式，再建立整个问题的数学模型。

以下均以毫米为单位，由所给信息不难求出车灯反射面(旋转抛物面)方程为

$$z = \frac{x^2 + y^2}{60}, \text{ 焦点坐标为 } (0,0,15)。$$

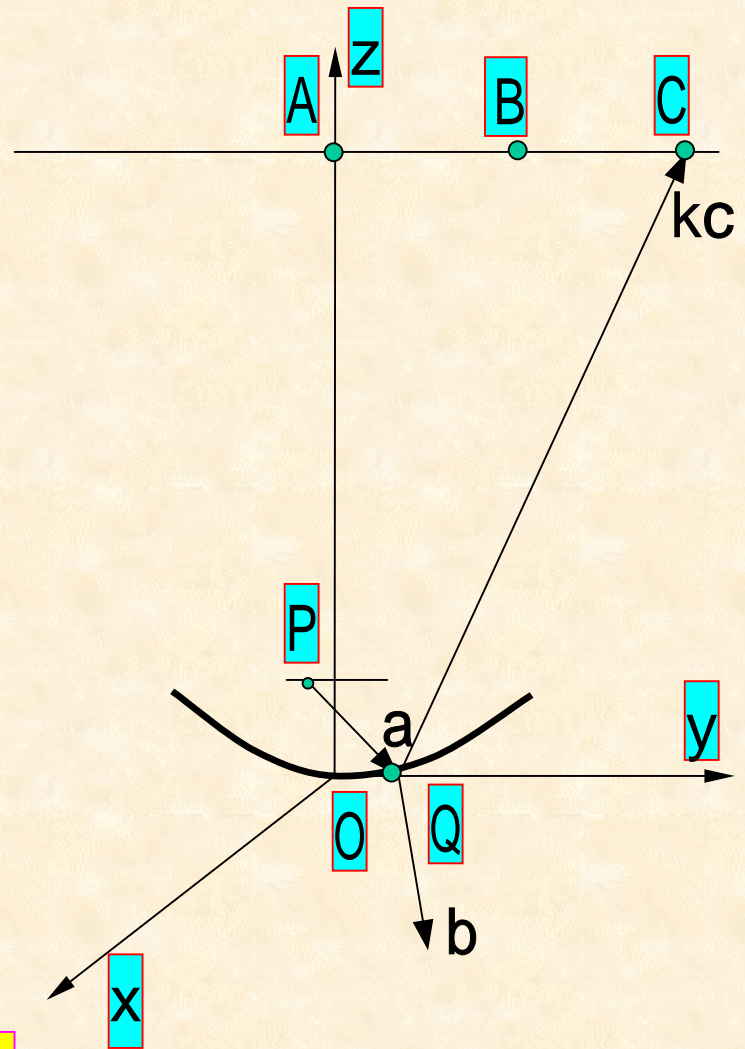
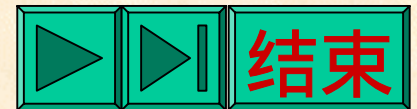
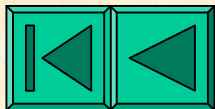


图1



1) 计算位于点  $P(0, w, 15)$  的单位能量的点光源反射到点  $C(0, 2600, 25015)$  的能量

设反射点的坐标为  $Q(x, y, \frac{x^2 + y^2}{60})$ . 记入射向量为  $\vec{a}$ , 该点反射面外法线方向为  $\vec{b}$ , 不难得到反射向量  $\vec{c}$  满足

$$\vec{c} = \vec{a} - \frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

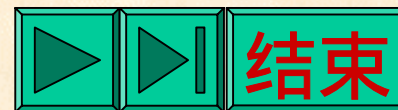
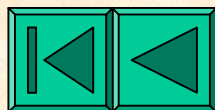
记  $r^2 = x^2 + y^2$ , 由

$$\vec{a} = (x, y - w, \frac{r^2}{60} - 15), \vec{b} = (x/30, y/30, -1)$$

而得  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  的表达式

$$c_x = \frac{2xyw}{r^2 + 900}, \quad c_y = \frac{w(2y^2 - r^2 - 900)}{r^2 + 900}$$

$$c_z = \frac{r^4 + 1800r^2 - 3600wy + 810000}{60(r^2 + 900)}$$



注意到反射光通过 C 点,应有

$$kc_x = -x, \quad kc_y = 2600 - y, \quad kc_z = 25015 - r^2 / 60$$

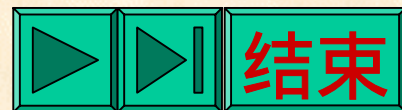
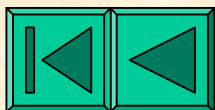
其中k为常数. 从上述第一式可解得  $x = 0$  或  $k = -\frac{r^2 + 900}{2wy}$ . 由此

得反射点坐标满足以下两组方程:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 2600)y^4 + 1800y^3 + (1498200w - 4680000)y^2 \\ + (9360000w + 810000)y - 1350810000w - 2106000000 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3750w}{13(w - 2600)} \\ x = \pm \sqrt{5200y - 900 - y^2} \end{cases}$$

通过计算可知,存在  $w_0^C \approx -1.56$ , 当  $w > w_0^C$  时第一组方程不存在满足  $r^2 \leq 36^2$  的实根, 即无反射点. 而当  $w < w_0^C$  时, 有两个反射点  $Q_i(0, y_i, y_i^2 / 60), i = 1, 2$ .





而第二组方程仅当  $-3.8119 < w < -1.5609$  时存在满足  $r^2 \leq 36^2$  的一对实根,即有两个反射点  $(\pm x, y, \frac{x^2 + y^2}{60})$ , 记为  $Q_3, Q_4$ .

若反射点的坐标为  $Q(x, y, z)$ , 则位于点  $P(0, w, 15)$  的单位能量点光源经  $Q$  点反射到  $C$  点的能量密度(单位面积的能量, 正比于光强度)为

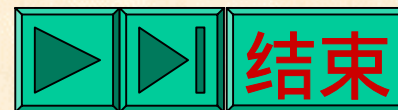
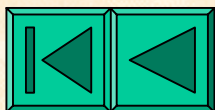
$$L = \frac{\cos \beta}{4\pi(\overline{PQ} + \overline{QC})^2}$$

其中  $\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + (y - w)^2 + (r^2 / 60 - 15)^2},$

$$\overline{QC} = \sqrt{x^2 + (2600 - y)^2 + (25015 - r^2 / 60 - 15)^2}$$

而  $\beta$  为反射向量与  $z$  轴的夹角

$$\cos \beta = \frac{25015 - r^2 / 60}{\overline{QC}}.$$



2)  $h_B(l), h_C(l)$ 的表达式

长  $l$  的具有单位能量的线光源位于点  $P(0, w, 15)$  的长  $dw$  的微小线光源段反射到  $C$  点的能量密度为

$$E(w) = \sum_{i=1}^4 f_i(w)/l,$$

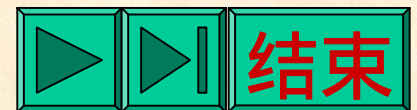
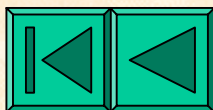
其中

$$f_i(w) = \begin{cases} \frac{\cos \beta_i}{4\pi(\overline{PQ_i} + \overline{Q_iC})^2}, & w \in [-l_0/2, w_0^C], i = 1, 2 \\ 0 & w \notin [-30, w_0^C] \end{cases}$$

$$f_i(w) = \begin{cases} \frac{\cos \beta_i}{4\pi(\overline{PQ_i} + \overline{Q_iC})^2}, & w \in [-3.8119, -1.5609], i = 3, 4 \\ 0 & w \notin [-3.8119, -1.5609] \end{cases}$$

长  $l$  的具有单位能量的线光源反射到  $C$  点的能量密度为

$$h_C(l) = \int_{-1/2}^{1/2} E(w)dw.$$



类似可得 $h_B(l)$ 的表达式.相应的反射点方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 1300)y^4 + 1800y^3 + (1498200w - 2340000)y^2 \\ + (4680000w + 810000)y - 1350810000w - 1053000000 = 0. \end{cases}$$

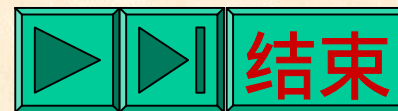
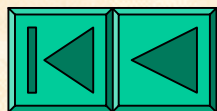
$$\begin{cases} y = \frac{7500w}{13(w - 1300)} \\ x = \pm \sqrt{2600y - 900 - y^2} \end{cases}$$

相应的 $w_0^B \approx -0.78$ ,而第二组方程的有两个反射点的范围为 $w \in [-1.906, -0.78000005]$ .

### 3) 优化设计的数学模型

设线光源的功率为 $W$ ,则它反射到 $B$ 点和 $C$ 点的能量密度分别为 $h_B(l) \cdot W$ 和 $h_C(l) \cdot W$ .问题的数学模型为:

$$\begin{cases} \min W \\ 0 \leq l \leq l_0 \\ \text{s.t.} \quad h_B(l)W \geq 2 \\ \quad \quad h_C(l)W \geq 1 \end{cases}$$





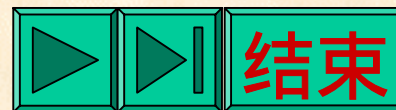
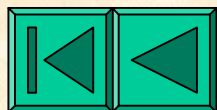
#### 4) 模型的求解

$h_B(l), h_C(l)$  可以用数值积分求得.  $h_B(l)$  应具备下列性质：

$$h_B(l) = \begin{cases} 0, & 0 < l < l_B = 2|w_0^B| \\ \uparrow, & l_B \leq l \leq l'_B \\ \downarrow, & l'_B < l \leq l_0 \end{cases}$$

其中  $l_B$  为起亮值,  $l'_B$  为最大值点,  $l_0$  为考察的最大范围, 例如取为 20mm.  $h_C(l)$  也有类似的性质, 且起亮值和最大值点均相应地右移. 数值求解  $h_B(l) = 2h_C(l)$ , 记其解为  $l = l_*$ , 再求出  $l'_B, l'_C$ . 不难看出  $l'_B < l'_C$  且  $l_*$  落在  $(l'_B, l'_C)$  之中。

令  $w_* = 1/h_C(l_*) = 2/h_B(l_*)$  现证  $w_*$  为问题之最优值。事实上, 对可行域中任一  $(l, w)$ , 当  $l \geq l_*$ , 有  $w \geq 2H/h_B(l) > 2H/h_B(l_*) = w_*$ , (用到  $l \geq l_*$  时  $h_B \downarrow$ )。



当  $l < l_*$  , 有  $w \geq 2H/h_c(l) > 2H/h_c(l_*) = w_*$  , (用到  $l < l_*$  时  $h_c \uparrow$ ) 。

这就证明了  $w_*$  的确是最小值。

事实上数值结果为： $l'_B \approx 3.86, l'_C \approx 7.62, \text{线光源长 } l_* \approx 4.41$

(2) 对得到的线光源长度，在有标尺的坐标系中画出测试屏上反射光的亮区。

分别将线光源和车灯反射面离散化为点光源和面元的集合，计算每一点光源关于每一车灯反射面元的反射光线，判断其是否与车灯反射面相交，若相交，一次反射光不能到达测试屏，否则求出该反射光线与反射屏平面的交点，即为反射亮点。所有这些亮点的集合即为反射光亮区。亮区的上半部分由下图所示(横坐标为  $x$  轴，纵坐标为  $y$  轴，单位为  $\text{mm}$ )，下半部分与上半部分是关于  $x$  轴对称的。

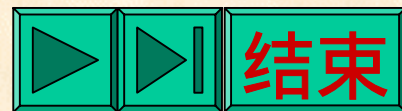
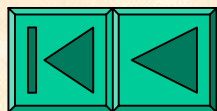


图2

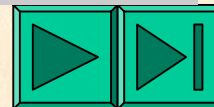
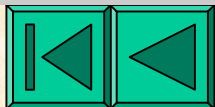
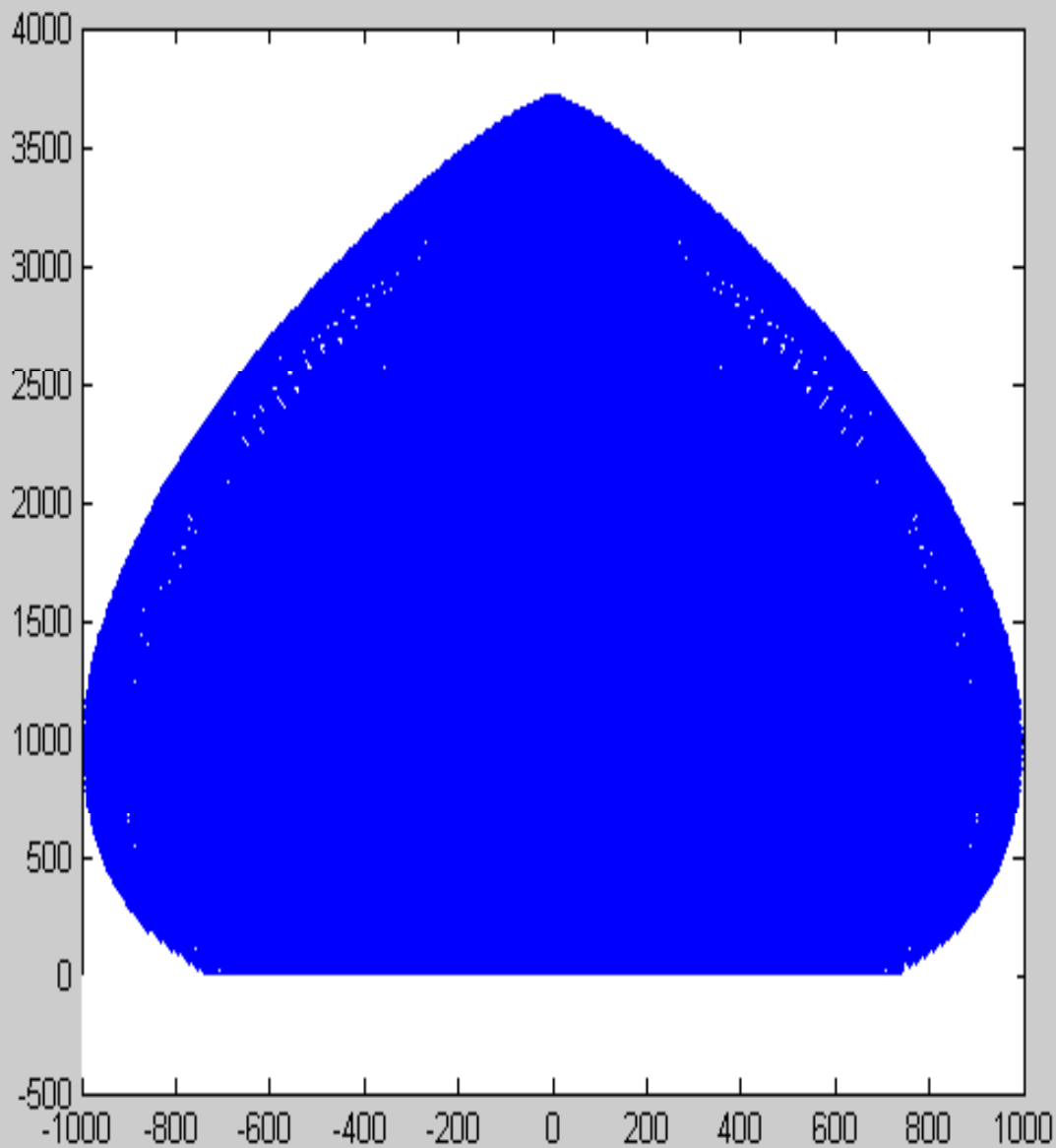
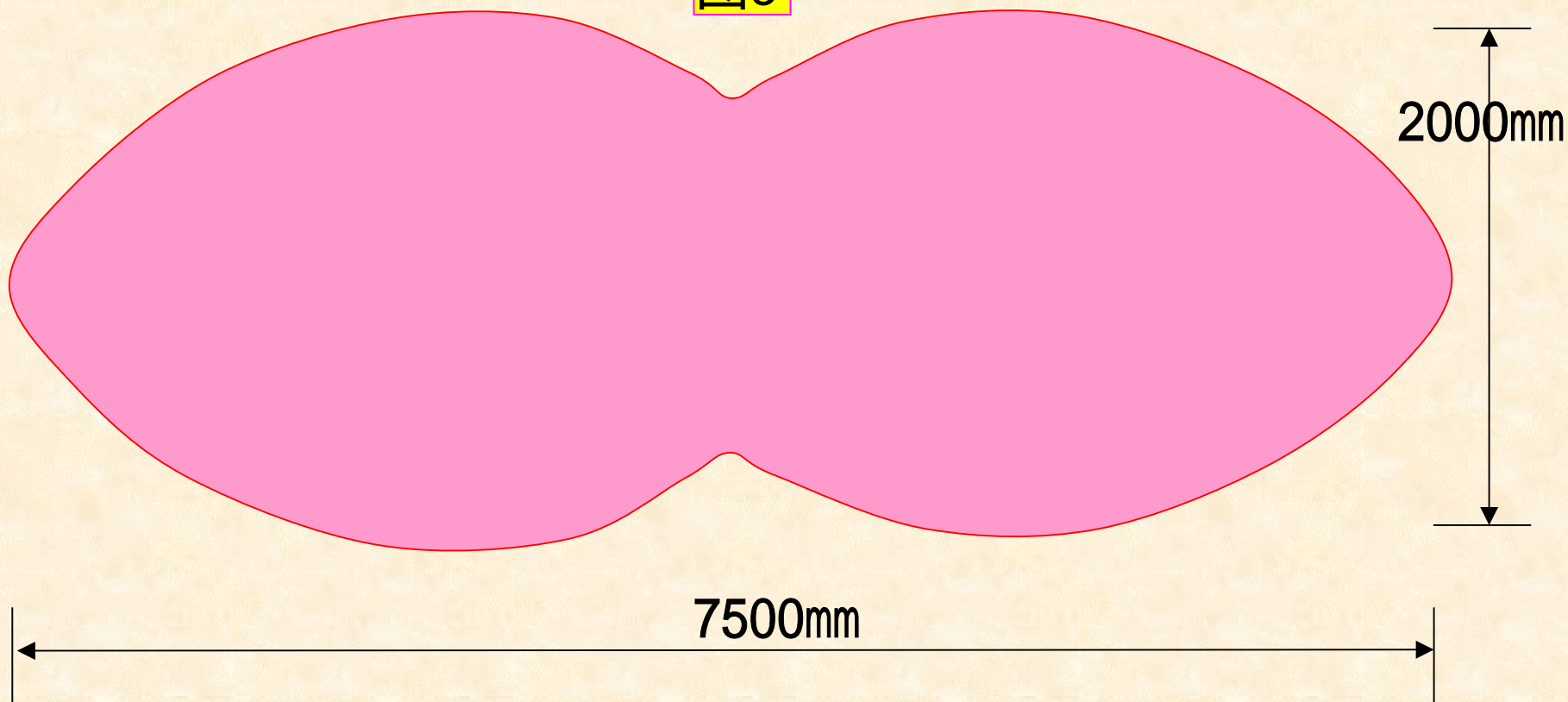
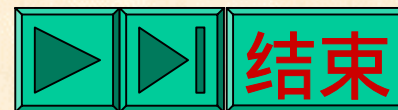
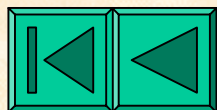




图3



从正面看，线光源一次光线的亮区应为图3的形状。宽度大约是7米5左右，高度大约是2米左右。图2是用Matlab软件画出的旋转了 $90^\circ$ 的亮区的一半。

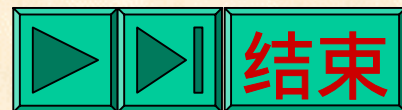
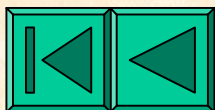


(3) 讨论该设计规范的合理性。

1 计算 $h_B(l)$ , ( $h_C(l)$ )的另一方法是建立问题的数值模型用数值模拟的方法加以解决.具体的做法是: 在得到反射光线和反射到测试屏上能量的数学模型后, 分别将线光源和车灯反射面离散化为点光源和面元的集合, 在测试屏 B(或 C)点附近取一微小面元.计算每一点光源关于每一车灯反射面元的反射光线, 将所有能到达该面元的反射光线的反射能量迭加起来, 除以面元的面积即为 B(或 C)点的反射能量密度.

但用这样的方法必须十分注意结果的检验, 注意计算精度(必须考察线光源和反射面的剖分密度和测试屏 B(或 C)点附近小面元的取法等).

2 以上参考答案中没有考虑线光源本身对反射光线的遮挡问题, 即假设线光源是透明的。如果假设线光源是不透明的, 似乎更符合现实。此时需要考虑线光源本身对反射光线的遮挡, 计算会更复杂些, 计算结果也会有所不同。



解法2 坐标系仍如图1。反射曲面S是旋转抛物面：

$$z = \frac{x^2 + y^2}{60}$$

点B(0,2600,25015)，线光源上一点P(0,w,15)射出的光被

S上的点Q(x,y,  $\frac{x^2 + y^2}{60}$ )反射

到B点，S在Q点向上的法向量

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{x}{30}, -\frac{y}{30}, 1\right) \parallel (-x, -y, 30)$$

因此取

$$\mathbf{n} = (-x, -y, 30)$$

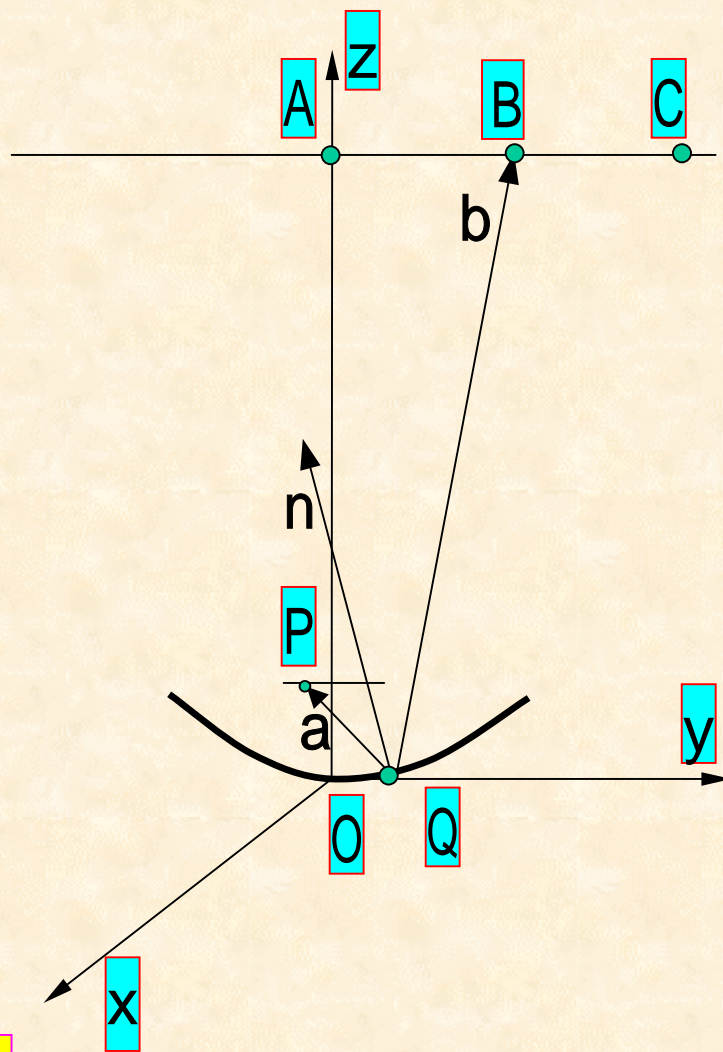
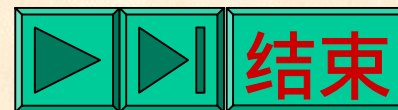
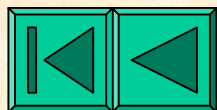


图1





设向量  $\overline{QP} = \left( -x, w - y, 15 - \frac{x^2 + y^2}{60} \right)$

令向量  $\mathbf{a} = (-60x, 60w - 60y, 900 - x^2 - y^2) // \overline{QP}$

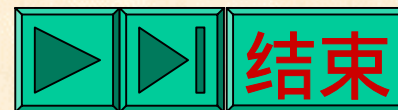
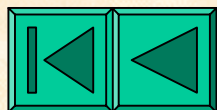
设向量  $\overline{QB} = \left( -x, 2600 - y, 25015 - \frac{x^2 + y^2}{60} \right)$

令向量  $\mathbf{b} = (-60x, 156000 - 60y, 1500900 - x^2 - y^2) // \overline{QB}$

由  $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{n}}) = \cos(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{n}})$

即 
$$\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{b} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{n}|} \quad \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{b}|}$$

得 
$$\frac{30x^2 + 30y^2 - 60wy + 2700}{\sqrt{3600x^2 + 3600(w - y)^2 + (900 - x^2 - y^2)^2}} = \frac{30x^2 + 30y^2 - 156000y + 1500900}{\sqrt{3600x^2 + 3600(2600 - y)^2 + (25015 - x^2 - y^2)^2}}$$



令  $x=0$  , 得  $y$  的5次方程 ( 其中含参数  $w$  ) 。

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 1300)y^4 + 1800y^3 + (1498200w - 2340000)y^2 \\ + (4680000w + 810000)y - 1350810000w - 1053000000 = 0. \end{cases}$$

当  $w \geq -0.78$  时, 此方程在  $[-36, 36]$  有解, 说明当灯丝至少长 1.56 毫米, 才有反射光到达 B 点。

令向量  $\mathbf{c} = (-60x, 312000 - 60y, 1500900 - x^2 - y^2) // \overline{QC}$

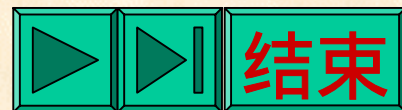
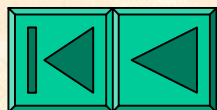
由  $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{n}}) = \cos(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{n}})$

即

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{c}| |\mathbf{n}|} \quad \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{c}|}$$

得

$$\begin{aligned} & \frac{30x^2 + 30y^2 - 60wy + 2700}{\sqrt{3600x^2 + 3600(w - y)^2 + (900 - x^2 - y^2)^2}} \\ &= \frac{30x^2 + 30y^2 - 312000y + 1500900}{\sqrt{3600x^2 + 3600(5200 - y)^2 + (25015 - x^2 - y^2)^2}} \end{aligned}$$



令  $x=0$  , 得 $y$ 的5次方程 ( 其中含参数 $w$  ) 。

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 2600)y^4 + 1800y^3 + (1498200w - 4680000)y^2 \\ + (9360000w + 810000)y - 1350810000w - 2106000000 = 0. \end{cases}$$

类似可得当 $w = -1.56$ 时 , 相应方程才在 $[-36, 36]$ 有解 , 说明当灯丝至少长3.12毫米 , 才有反射光到达C点 。

设灯丝的长度为 $L$  , 只要从 $-0.78$  到 $-L/2$ 的一段灯丝对应的抛物面上的反射面积 $S_1$  , 等于从 $-1.56$  到 $-L/2$ 的一段灯丝对应的抛物面上的反射面积 $S_2$ 的两倍 , 则B点的亮度(功率)就近似等于C点的亮度(功率)的两倍。由此可求出 $L = 4.41$ 毫米。

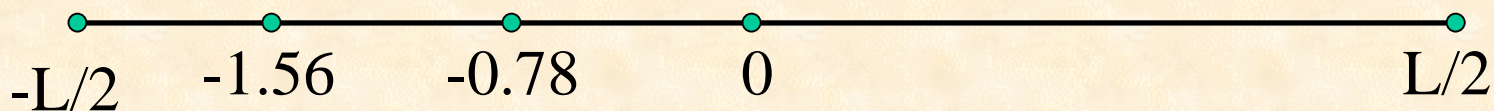
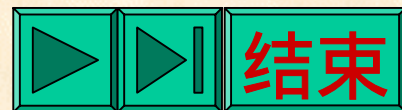
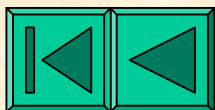


图1 灯丝长 $L$

亮区求法与前面类似 , 略。





数学建模竞赛网站：

[mcm.edu.cn](http://mcm.edu.cn)

Matlab大观园网站：

[www.matlab-world.com](http://www.matlab-world.com)

Matlab语言与应用精华网站：

[sh.netsh.com](http://sh.netsh.com)

