易拉罐的设计

本案例用求极值的模型，计算出最省材料的圆柱形易拉罐的尺寸。

然后用线性规划模型解决了在两种不同规格的镀锡板上如何下料，才最省材料的问题

主 要 内 容

- 问题的提出
- 问题分析
- 模型假设
- 模型建立
- 模型求解
- 结果分析与检验
- 其他思考

问题的提出

随着经济与科技的发展，人类生活水平大幅度提高。越来越多的人喜欢喝罐装饮料，如百事可乐，可口可乐，罐装啤酒等。对于商家来说，怎样设计饮料罐，使得制造用材最省？

（一）单个罐身：

问题分析：

首先考虑单个饮料罐的用材，既考虑饮料罐本身的设计。由于在市场上的百事可乐，可口可乐，雪花啤酒，山城啤酒等同等大小的易拉罐上均标明了容积为355毫升。所以考虑易拉罐能容纳的体积是既定的，因此问题化为如何使所用面积最小。为了方便放置，可将易拉罐设计成长方体和圆柱体两种类型。

模型假设：

因为罐盖（上底）厚度为罐底（下底）厚度的三倍，所以假设罐盖（上底）为三片与罐底（下底）同厚度的材料重叠而成。

对于长方体型，有假设：长为a，宽为b，高为h，容积为v;

对于圆柱体型，有假设：半径为r，高为h，容积为v;

模型建立：

长方体型：v=abh;所以有 h=v/(ab)

$s=4ab+2ah+2bh=4ab+2v/b+2v/a$

$$\partial s/\partial a = 4b - 2v/a^2$$

$$\partial s/\partial b = 4a - 2v/b^2$$

$$v=\pi r^2 h;\ h=\frac{v}{\pi r^2}$$

圆柱体型：

$$s=3\pi r^2+\pi r^2+2\pi rh=4\pi r^2+\frac{2v}{r}$$

$$\frac{ds}{dr}=8\pi r-\frac{2v}{r^2}$$

模型求解：

对长方体型，当s最小时有：

$$4a = 2v / b^2 \qquad 4b = 2v / a^2$$

即a=b ,解得

$$\begin{cases} a = b = \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ h = (4v)^{\frac{i}{3}} \\ s = 6(2v^2)^{\frac{1}{3}} = 7.56v^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

对圆柱体型，当s最小时有：

$$8\pi r = \frac{2v}{r^2}$$

解得

$$\begin{cases} r = \left(\dfrac{v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \\ h = \left(\dfrac{16v}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \\ s = 3(4\pi v^2)^{\frac{1}{3}} = 6.975v^{\frac{2}{3}} \end{cases} \qquad ①$$

由两者对比可知，圆柱体型面积（$6.975v^{\frac{2}{3}}$）比长方体型面积（$7.56v^{\frac{2}{3}}$）小,所以选用圆柱体型。

又已知容积为355毫升，代入①式中得

$$\begin{cases} r = 3.05cm \\ h = 12.18cm \\ s = 350.3cm^2 \end{cases}$$

结果分析：

由①知，半径和柱体的高均和容积的1/3次方成正比，随容积的增加而增加，随容积的减少而减少。且高是半径的三倍,由于对π的近似计算,使得理论结果中h与r的3倍多0.03厘米.

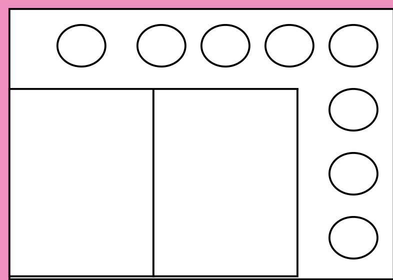
模型检验：

市面上的饮料罐模型均为圆柱体，证明圆柱体节约了材料。实际测得该种易拉罐的高为12.10cm，与理论结果12.18cm相差甚微，误差为0.66%.说明圆柱体模型正确可靠.

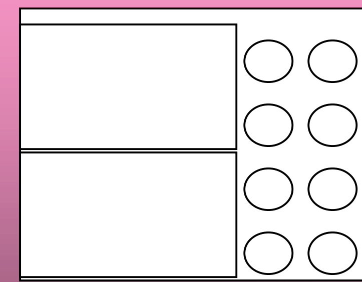
（二）多个罐身

其次，考虑整个生产线中材料的节省问题。由以上的计算得到了单个饮料罐的最佳半径和柱体的高，为了便于下面的计算，将半径简化为3厘米，将高简化为12厘米，采用线性规划模型来估计。

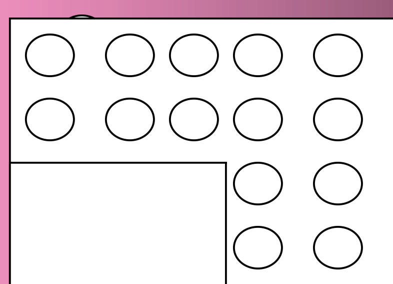
假设某公司采用一套冲压设备生产该大小类型的易拉罐。这种易拉罐用镀锡板冲压制成。易拉罐为圆柱体型，包括罐身，罐盖，罐底，罐身高为12厘米，罐盖和罐底的半径为3厘米。该公司使用两种不同规格的镀锡板原料：规格1的镀锡板为长方形，长、宽分别为32厘米和28厘米；规格2的镀锡板为正方形，边长为25厘米。由于生产设备和生产工艺的限制，对于规格1的镀锡板只可以按下图1，2，3，4，5，五种模式冲压，对于规格2的镀锡板只可以按下图的6，7，8，三种模式冲压。每周可供使用的规格1、规格2的镀锡板原料分别为2万张和5万张。应各用什么模式，最省材料？



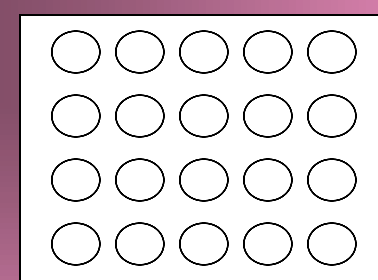
1



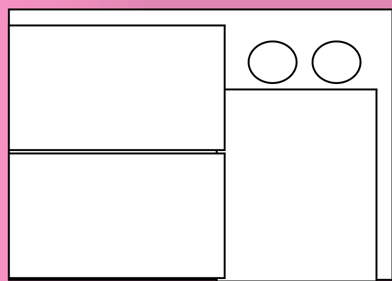
2



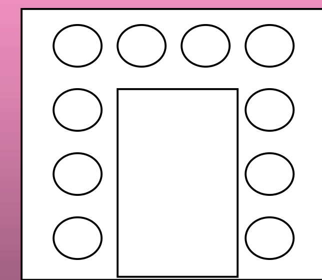
3



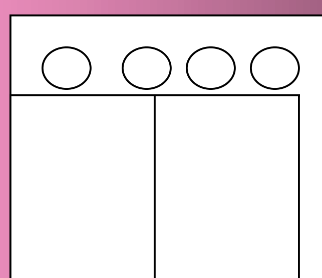
4



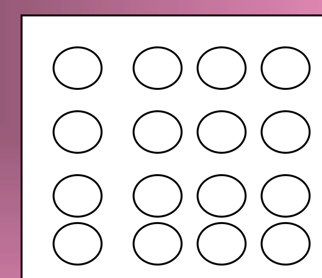
5



6



7



8

模型分析：

已知半径和柱高，可得罐盖（底）的面积 $s=\pi r^2\approx 28.3cm^2$，罐身面积为 $S=2\pi rh\approx 226.2cm^2$。于是各种模式下的用料归纳如下表：

模式	罐身个数	底、盖个数	用料面积（cm²）	余料面积（cm²）
1	2	8	678.8	217.2
2	2	8	678.8	217.2
3	1	14	622.4	273.6
4	0	20	565.5	330.5
5	3	2	735.2	160.8
6	1	10	509.2	115.8
7	2	4	565.6	59.4
8	0	6	452.8	172.2

观察上表可知，模式1、模式2、模式3、模式4的余料面积太多（>200cm²）,造成了资源的较大浪费，与节省材料的要求不符，舍去不用。因此选择模式5、模式6、模式7、模式8进行冲压。

模型建立：

决策变量：

用xi表示按照第5、6、7、8四种模式的冲压次数（I=1,2,3,4），由于生产量相当大，可以把xi看成是实数，从而用线性规划模型来处理。

决策目标：

要使所剩余料面积最小，即最大限度的使用材料，用料面积最大。于是有：

Max 735.2x1+509.2x2+565.6x3+452.8x4 （1）

约束条件：

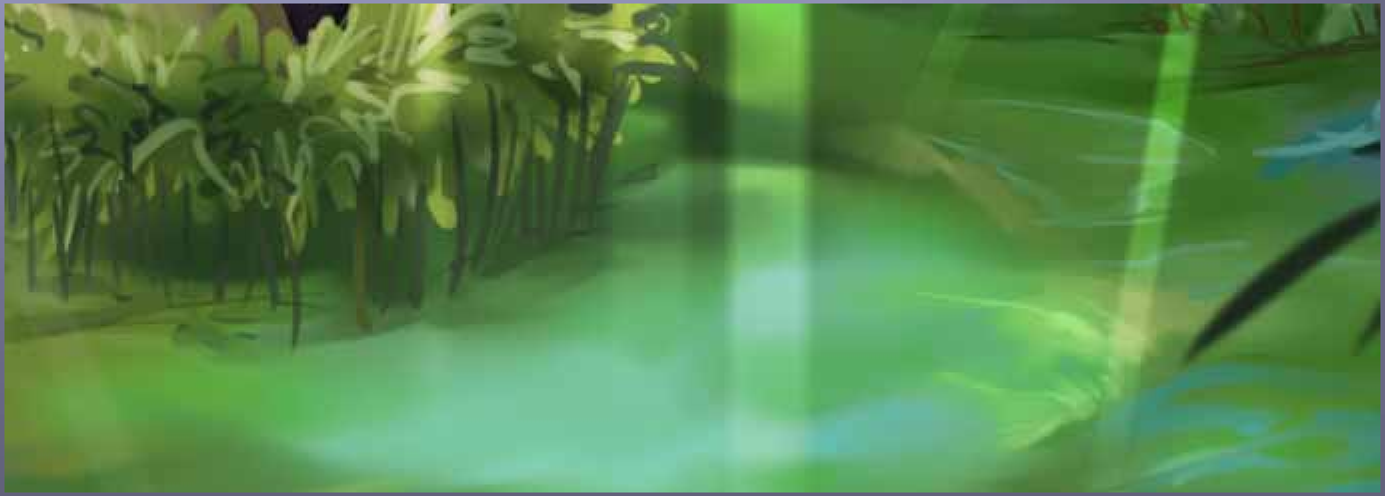
原料约束：每周可以使用的规格1的镀锡板为2万张，规格2 的镀锡板为5万张，即

$$\begin{cases} x_1 <= 20000 \\ x_2 + x_3 + x_4 <= 50000 \end{cases}$$ （2）

配套约束：罐盖厚度为罐底厚度的三倍，所以设罐盖为3个罐底重合而成。则一个罐身与四个罐底配套，即

$$(3x_1 + x_2 + 2x_3)*4 <= 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 16x_4$$

$$10x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 16x_4 <= 0 \qquad (3)$$



模型求解：

将模型（1）～（3）输入LINDO，程序如下：

```
Max 735x1+509x2+565.6x3+452.8x4
ST
    x1<=20000
    x2+x3+x4<=50000
    10x1-6x2+4x3-16x4<=0
end
gin 4
```

求解得到：

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)　0.4072400E+08

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20000.000000	-735.000000
X2	0.000000	-509.000000
X3	30000.000000	-565.599976
X4	20000.000000	-452.799988

结果分析：

即模式5使用2万次，模式6不使用，模式7使用3万次，模式8使用2万次。

同时再考虑如何使得使用的镀锡板张数最多，有：

决策目标：

所使用的总张数最多，即 max $x1+x2+x3+x4$

约束条件：

原料约束与配套约束同上，但总张数不超过7万张，即 $x1+x2+x3+x4=70000$

输入LINDO有程序如下：

```
max x1+x2+x3+x4
ST
    x1<=20000
    x2+x3+x4<=50000
    x1+x2+x3+x4=70000
   10x1-6x2+4x3-16x4<=0
end
gin 4
```

求解得：

1)　　70000.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20000.000000	-1.000000
X2	0.000000	-1.000000
X3	30000.000000	-1.000000
X4	20000.000000	-1.000000

结果分析：

即模式5使用2万次，模式6不使用，模式7使用3万次，模式8使用2万次。与前面的结果一致，则该模型可行。

其他思考

1 桌上放着一个钱币，问蜡烛的火焰离桌面多高的时候可以把这个钱币照得最亮？

2 研究由两盏路灯照明的一条水平的道路,其中 P_i是路灯的亮度,h_i是灯的高度。两盏路灯的坐标分别是 $(0, h_1)$ 和 (s, h_2)，其中s是两灯之间的水平距离。令X=（x，0）是两灯之间道路上的一个点，找出具有最小照明强度的点X。