

# 方程与方程组

## — 应用案例：放射性废物的处理



## 放射性废物的处理





## 【问题背景】

美国原子能委员会早期是按以下方式处理浓缩放射性废物的. 他们将废物装入密封性能很好的圆桶中, 然后扔到水深300英尺的海里. 这种做法是否会造成放射性污染, 很自然地引起了生态学家及社会各界的关注. 原子能委员会一再保证, 圆桶非常坚固, 决不会破漏, 这种做法是绝对安全的. 然而一些工程师们却对此表示怀疑, 他们认为圆桶在海底相撞时有可能发生破裂. 由此双方展开了一场笔墨官司.

究竟谁的意见正确呢? 只能让事实说话了!





## 问题分析

问题的关键在于圆桶到底能承受多大速度的碰撞？圆桶和海底碰撞时的速度有多大？

工程师们进行了大量破坏性的实验，发现圆桶在直线速度为40 ft/s 的冲撞下会发生破裂，剩下的问题就是计算圆桶沉入300 ft 深的海底时，其末速度究竟有多大？

## 问题假设

1. 使用55加仑的圆桶; (1加仑 = 3.7854升)

2. 装满放射性废物时的圆桶重量为

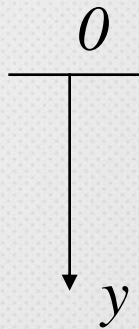
$$W = 527.436 \text{磅} \quad (1 \text{磅} = 0.4526 \text{公斤})$$

3. 在海水中圆桶受到的浮力  $B = 470.327 \text{磅}$

4. 圆桶下沉时受到海水的阻力  $D = C v$

$C$  为常数, 经测算得:  $C = 0.08$ .

5. 建立坐标系, 取垂直向下为坐标方向  $y$ ,  
海平面为坐标原点.







## 建立模型

根据牛顿第二定律, 圆桶下沉时应满足微分方程:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = W - B - D \quad (\text{重力} - \text{浮力} - \text{阻力})$$

$$\text{其中} \quad m = \frac{W}{g}, D = Cv, \frac{dy}{dt} = v \quad B = 470.327$$

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = W - Cv - B \\ \text{初值条件: } v(0) = 0 \end{cases}$$

$$W = 527.436$$

$$C = 0.08$$

$$\text{其解: } v(t) = \frac{W - B}{C} (1 - e^{-\frac{Cg}{W}t})$$

容易计算出圆桶的极限速度:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{W - B}{C} \approx 713.86 (\text{ft/s}) \quad (\text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时})$$



## 模型求解

$$v(t) = \frac{W - B}{C} \left(1 - e^{-\frac{Cg}{W}t}\right)$$

为了求出圆桶与海底的碰撞速度  $v(t)$ , 需要求出圆桶下沉到海底300英尺时的时间  $t$ , 再计算  $v(t)$ , 要做到这一点是十分困难的. 若将速度  $v$  看成是海水深度  $y$  的函数, 即

由复合函数的求导法则

$$v(t) = v(y(t))$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} v$$





## 模型求解

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = W - B - D \quad (\text{重力} - \text{浮力} - \text{阻力})$$

由复合函数求导法则  $mv \frac{dv}{dy} = W - B - Cv$

可得 
$$\frac{v}{W - B - Cv} dv = \frac{g}{W} dy$$

初值条件:  $v(0) = 0, y(0) = 0$

积分, 得: 
$$-\frac{v}{C} - \frac{W - B}{C^2} \ln \frac{W - B - Cv}{W - B} = \frac{gy}{W}$$

**难以直接求出  $v$  的表达式!**

借助数值方法求出  $v(300) = 45.1 \text{ft/s}$ , 显然大于  $40 \text{ft/s}$ 。

**结论: 放射性废物不能随意放入公海!**



# Thanks

