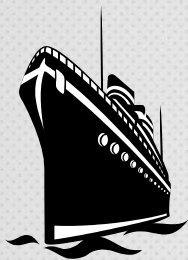


微分方程

— 应用案例：导弹追踪问题





设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点 $A(1, 0)$ 处的乙舰发射导弹，导弹头始终对准乙舰.如果乙舰以最大的速度 v_0 (是常数)沿平行于y轴的直线行驶，导弹的速度是 $5v_0$ ，求导弹运行的曲线方程.又乙舰行驶多远时，导弹将它击中？

解法一（解析法）

假设导弹在 t 时刻的位置为 $P(x(t), y(t))$ ，乙舰位于 $Q(1, v_0 t)$

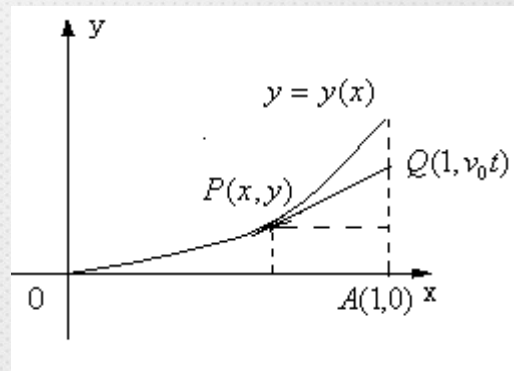
由于导弹头始终对准乙舰，故此时直线 PQ 就是导弹的轨迹曲线弧 OP 在点 P 处的切线，

$$\text{即有 } y' = \frac{v_0 t - y}{1 - x}$$

$$\text{即 } v_0 t = (1 - x)y' + y \quad (1)$$

又根据题意，弧 OP 的长度为 $|AQ|$ 的5倍，

$$\text{即 } \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 5v_0 t \quad (2)$$



由(1),(2)消去 t 整理得模型:

$$(1-x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2} \quad (3)$$

初值条件为: $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

解即为导弹的运行轨迹:

$$y = -\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$$

当 $x=1$ 时 $y = \frac{5}{24}$, 即当乙舰航行到点 $(1, \frac{5}{24})$ 处时被导弹击中.

被击中时间为: $t = \frac{y}{v_0} = \frac{5}{24v_0}$. 若 $v_0=1$, 则在 $t=0.21$ 处被击中.

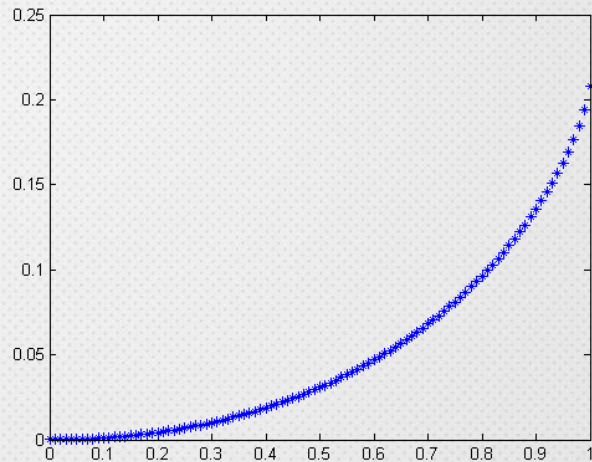
导弹轨迹程序：

```
clear
```

```
x=0:0.01:1;
```

```
y=-5*(1-x).^(4/5)/8+5*(1-x).^(6/5)/12+5/24;
```

```
plot(x,y,'*')
```



解法二 (数值解)

令 $y_1=y, y_2=y_1'$, 将方程 (3) 化为一阶微分方程组。

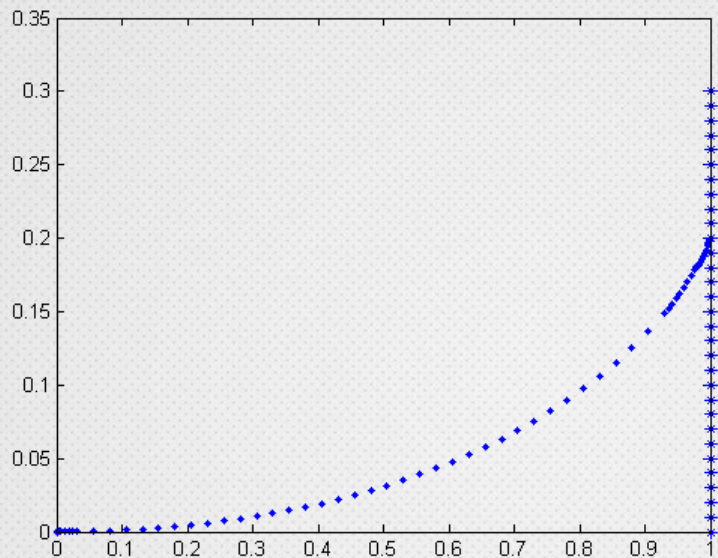
$$(1-x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y_1^2} / (1-x) \end{cases}$$

1. 建立m-文件fun.m

```
function dy=fun(x, y)
dy=zeros(2, 1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1/5*sqrt(1+y(1)^2)/(1-x);
```

2. 取 $x_0=0, x_f=0.9999$, 建立主程序如下:

```
x0=0, xf=0.999
[x, y]=ode45('fun', [x0 xf], [0 0]);
plot(x, y(:, 1), 'b.')
hold on
y=0:0.01:0.3;
plot(1, y, 'b*')
```



结论: 导弹大致在 (1 , 0.2) 处击中乙舰

Thanks

