教堂顶部装修问题

本案例对二重积分用数值积分模型计算半椭球面的面积，算出了装修教堂顶部所用金箔的面积。本案例主要涉及二重积分、数值积分的知识。

主 要 内 容

实际问题

数学模型

数值积分方法求解

进一步的思考

实际问题

- 某个阿拉伯国家有一座著名的伊斯兰教堂，它以中央大厅的金色巨大拱形圆顶名震遐迩。因年久失修，国王下令将教堂顶部重新贴金箔装饰。据档案记载，大厅的顶部形状为半球面，其半径为30m，考虑到可能的损耗和其他技术因素，实际用量将会比教堂顶部面积多1.5%。据此，国王的财政大臣拨出了可制造5750m2 有规定厚度金箔的黄金。建筑商人哈桑略通数学，他计算了一下，觉得黄金会有盈余。于是，他以较低的承包价得到了这项装饰工程。但在施工前的测量中，工程师发现教堂顶部实际上并非是一个精确的半球面是半椭圆球面，其半立轴恰是30m。而半长轴和半短轴分别是30.6m和29.6m。这一来哈桑犯了愁，他担心黄金是否还有盈余？甚至可能短缺。最后的结果究竟如何呢？

数学模型

- 取椭球面中心为坐标原点建立直角坐标系，则教堂顶部半椭球面的方程可写为
- $$z = R\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \qquad (2.1)$$
- 其中**R=30**，**a=30.6**，**b=29.6**，而其表面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \qquad (2.2)$$

- 这里积分区域**D**为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$$

- 通过简单的计算容易得到

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{\frac{R^2x^2}{a^4}+\frac{R^2y^2}{b^4}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

- 引进变量代换

$$x=ar\cos\theta \qquad y=br\sin\theta$$

- 则有

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\frac{R^2r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)}{1-r^2}}\,abrdr \quad (2.3)$$

- 这个积分相当复杂,若记

$$\mu = R^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{+\sin^2\theta}{b^2}\right)\lim_{x\to\infty} \quad (2.4)$$

那么（2.3）中关于r的积分

$$\int_0^1\sqrt{1+\frac{\mu r^2}{1-r^2}}\,r\,dr=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu\left[\ln\left(1+\sqrt{1-\mu}\right)-\ln\sqrt{\mu}\right]}{2\sqrt{1-\mu}}, & (\mu\le 1)\\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}\arcsin\sqrt{\dfrac{\mu-1}{\mu}}, & (\mu>1)\end{cases} \quad (2.5)$$

- 这里μ=1的情况要对表达式求极限。注意到μ的表达式（2.4），若将式（2.5）代入式（2.3）得到的是一个极为复杂的积分式。事实上，这是一个无法以初等函数形式来表达的积分，因此我们必须使用近似方法来处理它。考虑到这一积分形式相当复杂，我们宁可直接对式（2.3）来进行处理。

数值积分方法求解

- 对于二重积分，可以如同一元函数定积分那样，将区域划分为小块，然后在每个小区域上对被积函数作近似简化求积，再把所有的值求和即可。
- 考虑矩形区域D：{0≤s≤c,0≤t≤d}上的二重积分
-
-

$$I=\iint_D f(s,t)dsdt \quad (2.6)$$

将D划分作mn个相等的小矩形 $\{s_{i-1}\le s\le s_i, t_{j-1}\le t\le t_j\}$ 其中

s_i 和 t_j 分别是s和t方向的分点.

$$s_i = ik, t_j = jh \qquad (i = 0,1,2,\cdots,m;\ j = 0,1,2,\cdots,n)$$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \int_{s_{\mathrm{i}-1}}^{s_{\mathrm{i}}} f(s,t)ds \qquad (2.7)$$

- 记

$$\varphi_i(t) = \int_{s_{\mathrm{i}-1}}^{s_{\mathrm{i}}} f(s,t)ds$$

- 则

$$I_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_{ji}} \varphi_i(t)dt$$

- 若对这两个单积分都用梯形法，就有

$$\varphi_i(t) = \frac{k}{2}\left[f(s_i, t) + f(s_{i-1}, t) \right]$$

而

$$I_{ij} \approx \frac{kh}{4}\left[f(s_{i-1}, t_{j-1}) + f(s_i, t_{j-1}) + f(s_{i-1}, t_j) + f(s_i, t_j) \right] \quad (2.8)$$

这样便可求得在D上的积分I的近似值

$$I = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} I_{ij}, \quad (2.9)$$

- 当将分点增加一倍使得 $k=\dfrac{c}{2m}$, $h=\dfrac{d}{2n}$ 而记 $s_i=ik, t_j=jh$
- （i=0,1,2,…,m；j=0,1,2,…,n）。那么对

$$I_{ij}=\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}dt\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}}f(s,t)ds \quad (i=1,3,\cdots,2m-1;\ j=1,3,\cdots,2n-1)$$

的两次积分都用Simpson法，就得到

$$\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}}f(s,t)ds=\frac{k}{3}\left[f(s_{i-1},t)+4f(s_i,t)+f(s_{i+1},t)\right]$$

从而

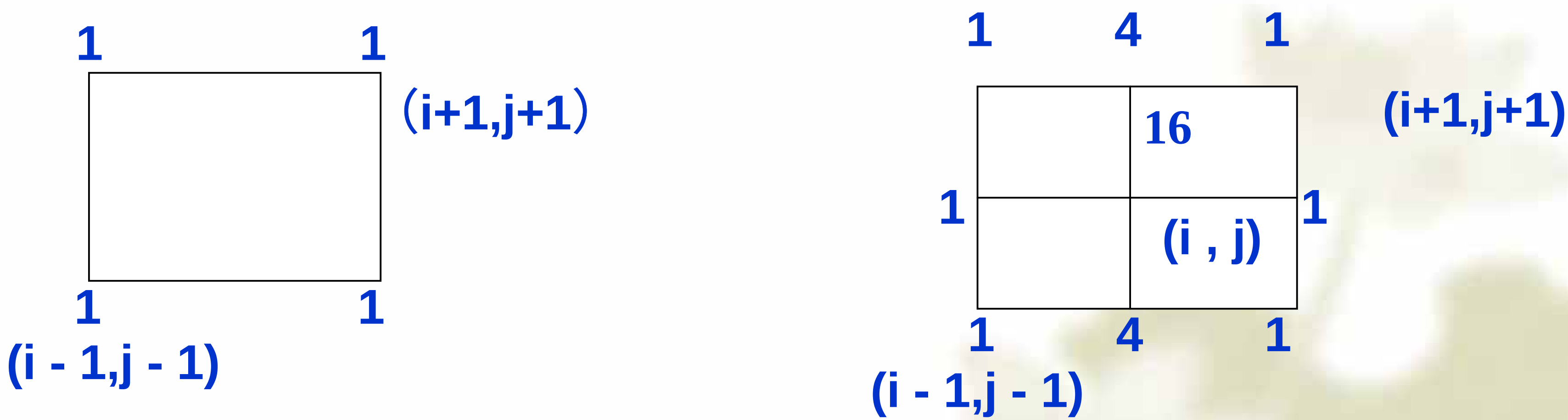
$$I_{ij}=\frac{kh}{9}\{\ f(s_{i-1},t_{j-1})+f(s_{i+1},t_{j-1})+f(s_{i-1},t_{j+1})+f(s_{i+1},t_{j+1})+$$
$$4\left[f(s_i,t_{j-1})+f(s_{i-1},t_j)+f(s_{i+1},t_j)+f(s_i,t_{j+1})\right]+16f(s_i,t_j)\ \}$$

（2.10）

- 于是有积分I 的近似值为

$$I \approx \sum_{i=1}^{2m-1} \sum_{j=1}^{2n-1} I_{ij}, \qquad i, j,\text{取奇数} \quad (2.11)$$

- 为了形象地表现由式（2.8）和（2.10）给出的计算格式，常用的办法是
- 如图2.1那样在分割的小矩形顶点上标出相应的函数值在和式中的加权数。



(格式（2.8）)

(格式（2.10）)

图2.1

- 对于矩形区域的重积分，还存在其的计算格式；另外，对于一些规则区域，也相应的近似计算格式，可以在数值计算的有关书籍或数学手册中查阅.
- 对于问题的面积S，由于积分表达式（**2.3**）在**r=1**处的奇性（被积函数分母为零），不能直接对此用上述数值方法.但只要作一个变换

$$t=\sqrt{1+r^2} \qquad (2.12)$$

就可以将（**2.3**）改写为

$$s=ab\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{t^2+R^2(1-t^2)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)}\,dt\,d\theta \qquad (2.13)$$

- 现在我们可以用数值积分的方法了.把二重积分（2.13）的积分区域{0，0}分割为m个小矩形，利用近似格式（2.8），我们得到如表2.1的计算结果：

表2.1

m	S	m	S
2	5 621.42	16	5 679.83
4	5 679.78	24	5 679.82``
6	5 679.89	44	5 679.81
10	5 679.84	100	5 679.81

- 从所得结果看，取面积值为**5 679.8**（㎡）已经极为精确，若仅要求精确到**0.1**（㎡），那么计算量可大大减少，此时**m=4**，而

$$S \approx 5679.82(m^2)$$

- 加上技术与损耗等因素，教堂顶部实际是用金箔总面积为

$$\overline{S} \approx (1+0.015)S = 5765.0(m^2)$$

- 显然，建筑商人哈桑金箔上将入不敷出，从而招受损失.

进一步的思考

- 对本问题 用近似格式（2.10）计算，和前面得到的结果作比较。

- 选择合适的数学软件实现本问题的求解，并分析结果精度。