概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

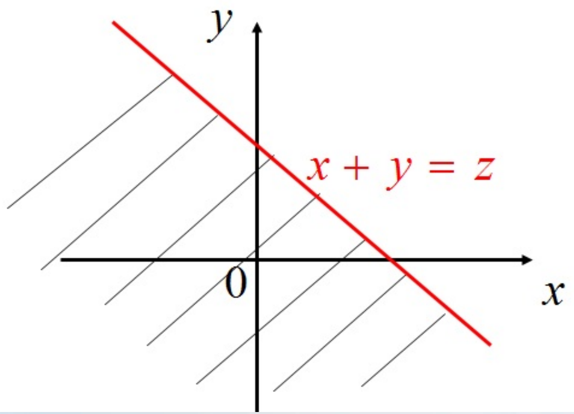
Chapter 1

多维随机变量及其分布

1.1 随机变量和的分布

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z\le z\} = P\{X+Y\le z\} \\
&= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right]dx
\end{aligned}
$$



动画流程是：

1. 出现坐标轴，x,y,0；
2. 出现红线，同时出现x+y=z；
3. 向左下方扫出阴影区。

由变限积分的导数运算法则

$$\left[\int_{-\infty}^{\varphi(z)} f(y)dy\right]' = f(\varphi(z))\varphi'(z)$$

求导数

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx, \quad z \in R$$

由对称性，同理可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy,\quad z\in R$$

以上两个公式称为卷积公式，卷积是分析数学中一种抽象运算，有时记为 $f(z)=f_X*f_Y$。

特别地，当 X 与 Y 相互独立时，则 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dy$$

类似地可以推导出 $Z=aX+bY(a\neq 0,b\neq 0)$ 密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z-ax}{b})dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{z-by}{a},y)dy$$

例 1.1.1. 设 (X, Y) 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$。

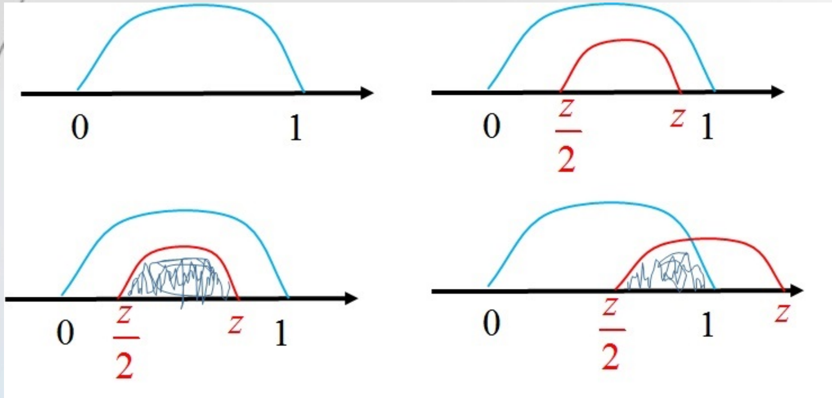
解：由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx, \quad z\in R$$

要使得 $f(x,z-x)\neq 0$，当且仅当

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<x\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}0<x<1\\ \frac{z}{2}<x<z\end{cases}$$

在坐标轴中画出区间示意图



动画流程是：
1. 左上图；
2. 如右上图，出现红色区间和红色的数值刻度，区间由小大到变化。注意保持一倍的刻度关系；
3. 显示左下图，出现阴影；
4. 显示右下图，出现阴影。

(1) 当 $0 < z < 1$ 时,

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{z} 3x dx = \frac{9}{8} z^2$$

(2) 当 $1 \leq z < 2$ 时,

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{1} 3x dx = \frac{3}{2}(1 - \frac{z^2}{4})$$

(3) 当 $z \leq 0$ 或 $z \geq 2$ 时,

$$f_Z(z) = \int_{-+\infty}^{+\infty} 0 dx = 0$$

整合得 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{9}{8}z^2, & 0 < z < 1 \\ \frac{3}{2}(1 - \frac{z^2}{4}), & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$