MATHEMATICA MODEL

非线性交调的频率设计

主讲：龚劬

摘要

本案例研究的是一非线性系统，当其输入为特定离散频率时，输出信号中原频率与交调频率之间的频差关系及相应的幅值关系，并据此选择输入信号的频率，以避免交调形成噪声干扰。

采用线性回归的方法获得系统的特性函数为：$y(t)=0.255091u(t)+0.0453838u^2(t)-0.000413u^3(t)$，并通过显著性检验，且$R^2$大于0.999，说明该模型是合理的。

在进行频率设计时考虑解为整数的特点，在穷举搜索法的基础上建立简单模型；通过简化判决条件，缩小检验范围，提高搜索速度，建立改进的搜索模型；进一步还给出了具有一般性的傅氏求解方法，最终得到两组解为f1=36,f2=42,f3=55和f1=36,f2=49,f3=55.

摘要

若考虑提高信噪比，则最优解为第一组解。

综上所述，本模型设计中充分考虑题设要求，在合理假设下简化模型，设计的模型具有简单、实用、易推广、适应范围广的特点。

一、问题背景

在通信工程中，信号的可靠性是至关重要的，在信号的传输过程中，往往遇到噪声干扰，干扰可能来自系统的外部，也可能由系统本身的非线性输出过程产生。

例如：一非线性系统 $y(t)=u(t)+u^2(t)$

输入 $u(t)=\cos 2\pi f_1 t+\cos 2\pi f_2 t$

输出信号 $y(t)$ 中还包含有新频率 $f_i \pm f_j\,(i,j=1,2)$ 称为交调，如果交调出现在原有频率的附近，就会形成噪声干扰。因此，在工程设计中，需要对输入信号的频率进行适当的选择，以避免交调形成噪声干扰。

二、问题

已知一SCS（非线性）系统，输入输出的对应关系由一组实验数据给定。

输入	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入 $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$

其中A_1=25，A_1=25，A_2=10，A_3=45，是输入信号的振幅，要求设计输入频率 f_1, f_2, f_3 并使其满足下列条件：

满足的条件

1． $f_1 \in [36,40],\ f_2 \in [41,50],\ f_3 \in [46,55].$

2．在区间范围内，f_1, f_2, f_3 只选择整数值。

3．通过SCS后的交调只考虑二阶类型 $f_i \pm f_j\,(i, j = 1,2,3)$ 和三阶类型 $f_i \pm f_j \pm f_k\,(i, j, k = 1,2,3)$。

4．$f_i \notin [f_j - 5, f_j + 5](i, j = 1,2,3, i \neq j)$ 。

5．交调 f_n=$f_i \pm 6$ 时，信噪比SNR=$10\lg\dfrac{B_i^2}{C_n^2} > 10dB$ 。其中 B_i 是 f_i（输入频率）的振幅，C_n是 f_n（交调）的振幅。

四、问题的分析

需建立两个模型

- 第一个模型是系统的输入输出函数模型。

  利用题目中给出的实验数据，在合理假设的情况下，通过拟合或回归的方法求解输入输出关系中的参数。

- 第二个模型是频率设计模型。

  由于求解范围在整数的范围，而且可得的组合在数量上不是十分大，所以可考虑采用搜索法进行求解。

五、假设

1. 该系统为一因果、时不变、无记忆的非线性系统。由因果时不变系统的特性可知：

   (1)　系统具有零输入时零输出的特点；

   (2)　系统参数不随时间零输出的特点；

2. 假设该系统的参数不随输入信号的频率变化而变化，

3. 系统的特性函数由实验进行测量给出。实验中输入信号是一确定量。输出观测量中不含系统误差，只有观测误差，其对应输入量的关系为 $y = f(u) + \varepsilon$，其中ε为随机扰动，假设该扰动是符合 $\mu = 0$ 的正态分布。

六、符号说明

$A(f)$ 频率为 f 分量的幅值

B 接收带（单边）

B_i 输入频率的振幅

C_n 交调 f_n 的振幅

f' 交调频率

f_i 输入频率

SNR 信噪比 $(10\lg\frac{B_i^2}{C_n^2})$

u(t) 输入信号

y(t) 输出信号

七、系统特性函数的回归模型

定义系统特性函数为：y(t)=f[u(t)]。

若只考虑t_0时刻，由假设知，$y(t_0)=f[u(t_0)]$可简写为：y=f(u)，其中u为输入信号，而y为输出信号。

由假设3知， $y=f(u)+\varepsilon$; 因为ε 符合 $\mu=0$ 的正态分布，所以可以根据实验数据用回归模型进行求解。

基于三点原因：

（1）假设1中为零输入时零输出；

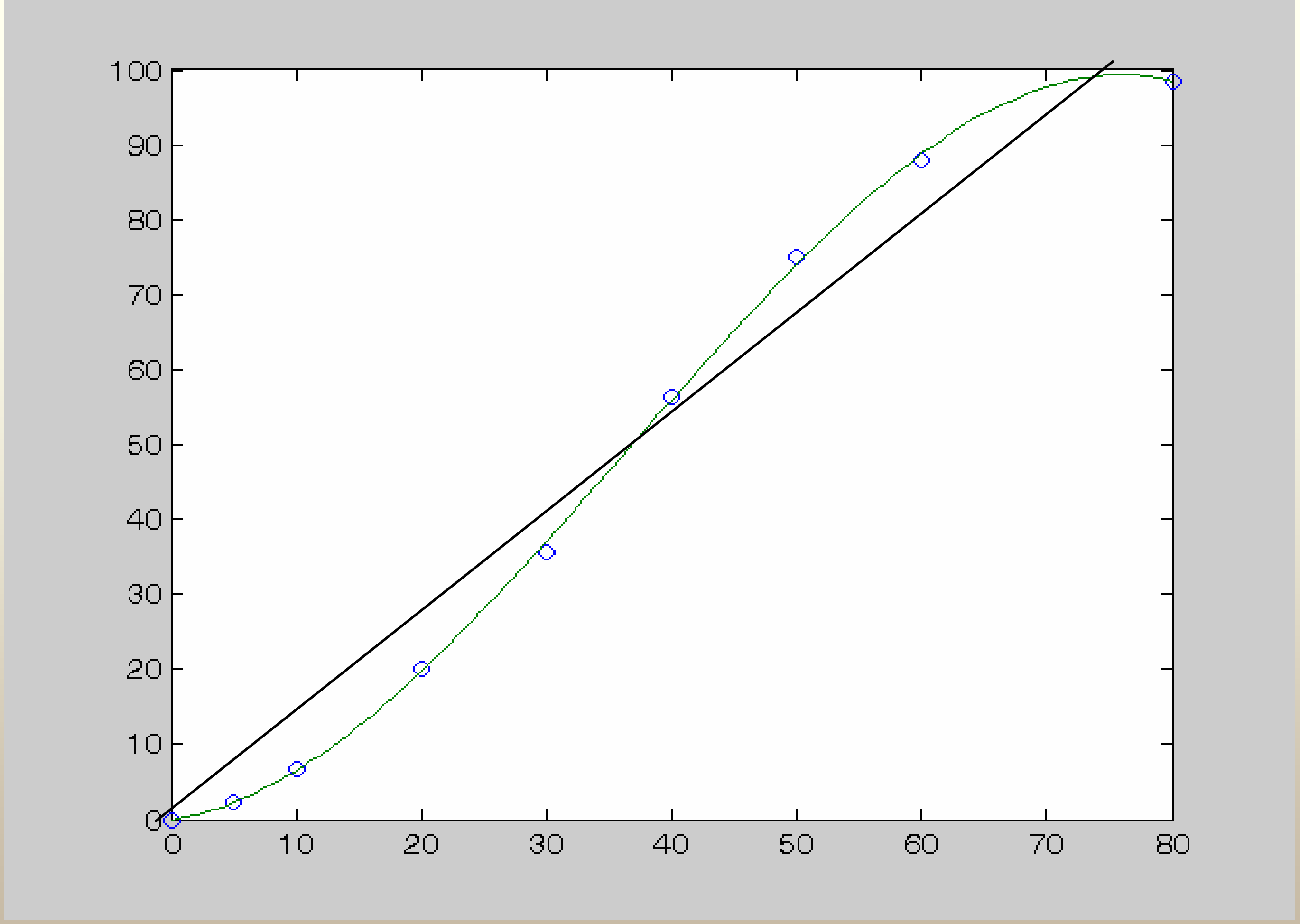
（2）只考虑二阶及三阶交调的影响；

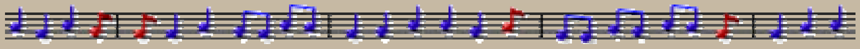
（3）多项式有利于频率及幅度的求解。

结合样本的散点图的形状，确定回归的模型为

$$y=a_1u+a_2u^2+a_3u^3$$

七、系统特性函数的回归模型





七、系统特性函数的回归模型

确定系数a_1,a_2,a_3的方法

1）求解优化问题：

$$\min Q(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a_1u_i+a_2u_i^2+a_3u_i^3)]^2$$

这是一个二次规划问题，可调用MATLAB软件中的函数quadprog求解。

或求解优化问题

$$\min Q(a_1,a_2,a_3)=\max_i|\varepsilon_i|=\max_i|y_i-(a_1u_i+a_2u_i^2+a_3u_i^3)|$$

这是一个最大最小化问题，可调用MATLAB软件中的函数fminimax求解。

七、系统特性函数的回归模型

确定系数a_1,a_2,a_3的方法

2）线性最小二乘拟合

令 $x_1=u, x_2=u^2, x_3=u^3$

用三元函数$y=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$来拟合已给数据（u_i, u_i^2, u_i^3, y_i），可调用MATLAB软件中的函数lsqcurvefit求解。

3）多元线性回归

回归模型为 $$\begin{cases} Y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2) \end{cases}$$

可调用MATLAB软件中的regress，得到系数的预测值。

七、系统特性函数的回归模型

用多元线性回归得到系数a_1,a_2,a_3的估计值

使用MATLAB软件中的多元线性回归，我们可以得到系数的预测值为， $\hat{a}_1=0.244091$， $\hat{a}_2=0.045383$， $\hat{a}_3=-0.000413$，相关系数 R 的平方值大于0.999，且所有检验都通过，效果很好。

若单纯从数据上回归的需要出发，我们共设计了7种类型的多项式，通过MATLAB中的regress和stepwise求解后得到各自优缺点，并列于下页的表中。

	模型	优点	缺点
1	$y=a+bu$	线性化，检验通过 $R=0.97$	不能反映系统非线性，无交调分量产生
2	$y=a+bu+cu^2$	系数显著性检验通过，二次项检验稍差	不能产生三阶交调
3	$y=a+bu+cu^{2+}du^3$	可以产生三次交调	常数项显著性检验不通过
4	$y=au+bu^{2+}cu^3$	可产生三次交调，显著性检验都通过 $R^2=0.999$	最多只能产生三次交调
5	$y=a+bu+cu^2+du^3+eu^4$		四次项系数检验不通过，没有意义
6	$y=a+bu+cu^2+du^3+eu^4+fu^5$	R^2进一步提高，五次项系数显著性检验通过	常数项及二次项不能通过显著性检验
7	$y=au+bu^{3+}cu^4+du^5$	R^2再一步提高，显著性检验很好	产生交调增多，下一步分析变复杂

七、系统特性函数的回归模型

进一步，对u，u^2，u^3进行逐步回归，参量进入顺序为u，u^3，u^2，说明奇数项的作用较大。而且在所作的7种模型中，最优的模型4与模型7均不含有常数项，说明假设1是合理的。

八、频率设计模型的分析与求解

将输入

$$u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$$

代入系统的输入输出特性函数

$$y(t) = 0.2441\, u(t) + 0.04538\, u^2(t) - 0.004133\, u^3(t)$$

中，利用积化和差公式 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
经整理得到y(t)的频率成分有以下几种：

（1）1阶：f_i, i=1,2,3;

（2）2阶：$|f_i \pm f_j|$, i, j=1,2,3;

（3）3阶：$|f_i \pm f_j \pm f_k|$，i, j, k=1,2,3;

八、频率设计模型的分析与求解

将输入

$$u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$$

代入系统的输入输出特性函数

$$y(t) = 0.2441\, u(t) + 0.04538\, u^2(t) - 0.004133\, u^3(t)$$

中，利用积化和差公式 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

经整理得到y(t)的频率成分有以下几种：

（1）1阶：f_i, i=1,2,3;

（2）2阶：$|f_i \pm f_j|$, i, j=1,2,3;

（3）3阶：$|f_i \pm f_j \pm f_k|$， i, j, k=1,2,3;

八、频率设计模型的分析与求解

（1）频率条件

对接收带宽度为2B的情况，当一频率组 f_1, f_2, f_3 满足下列条件时称为满足频率条件（除去 $f_i + f_j - f_j$ 情况）。

$$a.\ f_i \notin [f_j - B, f_j + B] \quad (i, j = 1,2,3)$$

$$b \cdot f_i \pm f_j \notin [f_l - B, f_l + B] \quad (i, j, l = 1,2,3)$$

$$c.\ f_i \pm f_j \pm f_k \notin [f_l - B, f_l + B] \quad (i, j, k, l = 1,2,3)$$

（2）幅度条件

C_n为交调产生的振幅，B_i为输出中主频的振幅。若 $f_n = f_i \pm 6 (i = 1,2,3)$，则对应SNR= $10\lg\frac{B_i^2}{C_n^2} > 10dB$ 。

八、频率设计模型的分析与求解

（3）第一类解

满足B=6的频率条件时的频率组，即为第一类解。显然，第一类解使所有差频与和频都落在 $f_i \pm 6(i=1,2,3)$ 外，因而自然满足幅度条件。

(4)第二类解

满足B=5的频率条件的频率组即为第二类解。

八、频率设计模型的分析与求解

模型I：简单模型

频率 f_1, f_2, f_3 为整数，且 $f_1 \in [36,40], f_2 \in [41,50], f_3 \in [46,55]$.因而解的可能组合有限，用穷举法搜索可能的组合。

搜索过程：当给定一组频率组，通过回归模型，将所产生的新的和频与差频进行记录，然后检验频率条件与幅度条件，符合则输出所得解，并更换另一组频率组重复上述步骤，直至所有可能情况都列举完。

考虑到频率条件比幅度条件简单，可将上述搜索过程分两步。第一步先搜索满足频率条件的频率组。第二步则在第一步中求得的解中检验幅度条件，搜索出第二类解。

八、频率设计模型的分析与求解

模型I：简单模型

第一步中，没有第一类解，第二类解的可能组合有6个：

（36，42，54）　（36，42，55）　（36，48，54）

（36，49，55）　（37，43，55）　（37，49，55）

第二步中，检验幅度条件后得到两个满足条件的第二类解：

（36，42，55）　（36，49，55）

比较得到的两组解在$f_i \pm 6$ 的SNR值，可确定解1优于解2，即最优解为（36，42，55），次优解为（36，49，55）

八、频率设计模型的分析与求解

模型II：改进模型

考虑交调减去主频后的频差的特点，可将频率条件简化。

定理：设离主频最近的交调与相应主频之间的频差的绝对值为d，则当 $f_i + f_j > f_k\,(i, j, k = 1,2,3)$时，

$$d = \min(f_3 - f_2, f_2 - f_1, 2f_1 - f_3, \left|f_3 + f_1 - 2f_2\right|) \quad (f_1 < f_2 < f_3)$$

因此，频率条件可简化为：对接收带2B而言，要求d>B。所以我们可将搜索条件改为d>B，写成不等式组的形式为：

$$\begin{cases} f_3 - f_2 > B \\ f_2 - f_1 > B \\ 2f_1 - f_3 > B \\ \left|f_3 + f_1 - 2f_2\right| > B \end{cases}$$

八、频率设计模型的分析与求解

对应所给数据B=6及 f_1, f_3 的区间范围可知， $2f_1 - f_3 > B$

必然成立。B=5时同样成立。

采用改进模型的一大优点是将问题设置为一规划问题：目标函数为使交调的SNR最小，约束方程一线性不等式组给出：

$$\begin{cases} f_1 \in [36,40] \\ f_2 \in [41,50] \\ f_3 \in [46,55] \\ f_2 - f_1 > B \\ f_3 - f_2 > B \\ |f_3 + f_1 - 2f_2| > B \end{cases}$$

这一规划问题的整数解即为本问题的最优解。

八、频率设计模型的分析与求解

模型III：傅氏级数展开法

在前面的模型中，仅局限于系统特性函数为三次多项式，这种简单的函数可通过各分量相乘来获得幅值，已相当麻烦且规律比较复杂。若系统的特性函数的多项式阶次提高或为非多项式形式，上述方法中的幅度条件很难判定。而采用傅氏级数法则可适应不同的函数类型。

当输入为离散整数频率时，y(t)的基频是整数，y(t)周期为1。所以，任意频率分量幅值 $A(f')=\sqrt{a^2+b^2}$

其中 $a=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(t)\cos 2\pi f' t\,dt, b=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(t)\sin 2\pi f' t\,dt$。

在本题中，y(t)为偶函数，故有 $A(f')=a=4\int_{0}^{\frac{1}{2}} y(t)\cos 2\pi f' t\,dt$

八、频率设计模型的分析与求解

模型III：傅氏级数展开法

用数值积分求出 $A(f_i')$ 这种方法运算量大，但可适应各种输入函数。

在本题中，应先按模型II（改进模型）的搜索方法找到可能解，再计算这些解中需检验幅值的频率 的 $A(f_i')$ 就可以进行检验，求出满足幅值条件的解。

使用MATLAB软件对两组频率值（36，42，54）、（36，42，55）进行本节中的分析，得到的结果与前面模型得到的结果相同。

九、稳定性分析

1.解关于系统特性函数多项式系数的稳定性

这里讨论当系统多项式的系数在什么范围变化时，解仍是解，非解仍是非解。

当系统特性函数多项式系数发生变化时，输出的频率不变，但各频率的振幅将发生变化。故只需讨论系统特性函数多项式系数变化时对有关信噪比的影响，即当多项式系数在什么范围变化时，前面得到的6组频率中，2、4组仍是解，3~6组仍是非解。

九、稳定性分析

1.解关于系统特性函数多项式系数的稳定性

这里讨论当系统多项式的系数在什么范围变化时，解仍是解，非解仍是非解。

当系统特性函数多项式系数发生变化时，输出的频率不变，但各频率的振幅将发生变化。故只需讨论系统特性函数多项式系数变化时对有关信噪比的影响，即当多项式系数在什么范围变化时，前面得到的6组频率中，2、4组仍是解，3~6组仍是非解。

九、稳定性分析

2.高阶系统多项式（≥4阶）对解的影响

前面系统多项式，采用的是三阶多项式，实际上大于等于4次的函数亦能产生一阶、二阶、三阶的交调。但由于4次及4次以上的项其系数非常小（$\leq 10^{-5}$）。故其产生的交调的振幅相对3次项产生的该交调的振幅的变化在解的稳定范围内，故用3次多项式是足够精确的。

十、模型的优缺点及其改进和推广

1.模型的优缺点

类别	优点	缺点
模型 I	原理简单明了	相对而言运算次数多
模型 II	求解速度快，程序简练，推广容易	只能搜索第一类解及第二类可能解
模型III	适用于任意系统的特性函数	速度慢，运算量大，

十、模型的优缺点及其改进和推广

2.改进与推广

（1）频率选择区间加大对第一类解的影响

当选择区间达到一定范围，特别是两端频率f1,f3之间的距离扩大时，第一类解必然可以找到，说明增大高、低频分量的频差有助于减小交调的影响。当将f3选择频率设为[46，57]时，可得两个第一类解：

（36，43，57）和（36，50，57）

十、模型的优缺点及其改进和推广

2.改进与推广

（2）接收带大小对解的影响

从程序运行结果可知，对于同一频率分辩力，当接收带缩小时，可能解的个数将大幅度增加。如为整数解时，当接收带从5降至4时，可能解的个数由6变为44。对于频率分辨力为0.5与0.1也有相同情况。如对于频率分辨力为0.1，当接收带从5降为4时，可能解的个数从322一下子变为12782个。

十、模型的优缺点及其改进和推广

2.改进与推广

（3）将输入信号由3项改为n项

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos 2\pi f_k t$$

研究其信噪比的计算和研究高阶交调（如5，7阶）的分析。Fourier分析是研究此问题的重要工具。

返回

The End