

概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中





Chapter 1

多维随机变量及其分布



1.1 随机变量极值的分布

对二维连续型随机变量 (X, Y) 的函数 $Z = g(X, Y)$, 在求 Z 的分布密度时, 最基本的方法是先求分布函数

$$F_Z(z) = P \{g(X, Y) \leq z\}$$

再求导数获得密度函数 $f(z) = F'(z)$ 。

极值函数包括: $Z = \max(X, Y)$ 和 $Z = \min(X, Y)$ 。



1.1.1 最大值函数分布

设二维连续型随机变量 (X, Y) 有联合分布函数和密度函数分别为 $F(x, y)$, $f(x, y)$, 求 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数和密度函数。

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\max(X, Y) \leq z\} \\ &= P\{X \leq z, Y \leq z\} = F(z, z) \end{aligned}$$

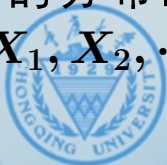
$$\begin{aligned} \text{如果 } X, Y \text{ 相互独立} &= P\{X \leq z\} \cdot P\{Y \leq z\} = F_X(z)F_Y(z) \\ \text{如果 } X, Y \text{ 独立同分布} &= [F_X(z)]^2 \end{aligned}$$

此时, 密度函数可写为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = 2F_X(z)f_X(z)$$

特别地, 如果连续型随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 X_i 的分布函数和密度函数分别为 $F(x), f(x)$, 则 $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = [F_X(z)]^n$$



密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = n[F_X(z)]^{n-1}f_X(z)$$



1.1.2 最小值函数分布

对二维连续型随机变量 (X, Y) 的最小值函数 $Z = \min(X, Y)$, 由分布函数法

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\min(X, Y) \leq z\} \\ &= 1 - P\{\min(X, Y) > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - \iint_D f(x, y) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{如果 } X, Y \text{ 相互独立} &= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

$$\text{如果 } X, Y \text{ 独立同分布} = 1 - [1 - F_X(z)]^2$$

此时, 密度函数可写为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = 2[1 - F_X(z)]f_X(z)$$

特别地, 如果连续型随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 X_i 的分布函数和密度函数分别为 $F(x), f(x)$, 则 $Z =$

$\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$$

密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1} f_X(z)$$



例 1.1.1. 设一系列随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同服从分布 $U[0, \theta], \theta > 0$, 求 $Z_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 和 $Z_2 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 的密度函数。

解: 因为 $X_i \sim U[0, \theta]$, 所以 X_i 的密度函数与分布函数分别为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 < x \leq \theta \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

由极值密度公式得:

$$\begin{aligned} f_{z_1}(z) &= n[F(z)]^{n-1}f(z) \\ &= \begin{cases} n\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{z_2}(z) &= n[1 - F(z)]^{n-1}f(z) \\ &= \begin{cases} n\left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

