概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

Chapter 1

多维随机变量及其分布

1.1 随机变量极值的分布

对二维连续型随机变量 (X, Y) 的函数 $Z = g(X, Y)$，在求 Z 的分布密度时，最基本的方法是先求分布函数

$$F_Z(z) = P\{g(X, Y) \leq z\}$$

再求导数获得密度函数 $f(z) = F'(z)$。

极值函数包括： $Z = \max(X, Y)$ 和 $Z = \min(X, Y)$。

1.1.1 最大值函数分布

设二维连续型随机变量 (X,Y) 有联合分布函数和密度函数分别为 $F(x,y)$，$f(x,y)$，求 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数和密度函数。

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z\le z\} = P\left\{\max(X,Y)\le z\right\} \\
&= P\left\{X\le z, Y\le z\right\} = F(z,z) \\
\text{如果 } X,Y \text{ 相互独立} &= P\left\{X\le z\right\}\cdot P\left\{Y\le z\right\} = F_X(z)F_Y(z) \\
\text{如果 } X,Y \text{ 独立同分布} &= [F_X(z)]^2
\end{aligned}
$$

此时，密度函数可写为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = 2F_X(z)f_X(z)$$

特别地，如果连续型随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 X_i 的分布函数和密度函数分别为 $F(x),f(x)$，则 $Z=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = [F_X(z)]^n$$

密度函数为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = n[F_X(z)]^{n-1} f_X(z)$$

1.1.2 最小值函数分布

对二维连续型随机变量 (X,Y) 的最小值函数 $Z=\min(X,Y)$，由分布函数法

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{\min(X,Y) \le z\} \\
&= 1 - P\{\min(X,Y) > z\} \\
&= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - \iint_D f(x,y)dx \\
\text{如果 } X,Y \text{ 相互独立} &= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \\
&= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] \\
\text{如果 } X,Y \text{ 独立同分布} &= 1 - [1 - F_X(z)]^2
\end{aligned}
$$

此时，密度函数可写为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = 2[1 - F_X(z)]f_X(z)$$

特别地，如果连续型随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 X_i 的分布函数和密度函数分别为 $F(x), f(x)$，则 $Z =$

$\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$$

密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1} f_X(z)$$

例 1.1.1. 设一列随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同服从分布 $U[0,\theta], \theta > 0$，求 $Z_1 = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ 和 $Z_2 = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$ 的密度函数。

解：因为 $X_i \sim U[0,\theta]$，所以 X_i 的密度函数与分布函数分别为：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 < x \le \theta \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

由极值密度公式得：

$$\begin{aligned} f_{z_1}(z) &= n[F(z)]^{n-1} f(z) \\ &= \begin{cases} n(\frac{z}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ f_{z_2}(z) &= n[1-F(z)]^{n-1} f(z) \\ &= \begin{cases} n(1-\frac{z}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$