

概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中





Chapter 1

第8章 假设检验



1.1 单个正态总体方差的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 考虑参数 σ^2 的检验。

① $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

拒绝条件: 如果 $\hat{\sigma}^2 = S^2$ 与 σ_0^2 相差过大, 则拒绝 H_0 。

拒绝形式: $|S^2 - \sigma_0^2| > C$

但 $k(S^2 - \sigma_0^2)$ 的分布却不易找到。

除了作差比较, 我们还学过作商比较。

$$\frac{S^2}{\sigma_0^2} \approx 1$$

由抽样分布定理, 在 H_0 下, 我们有

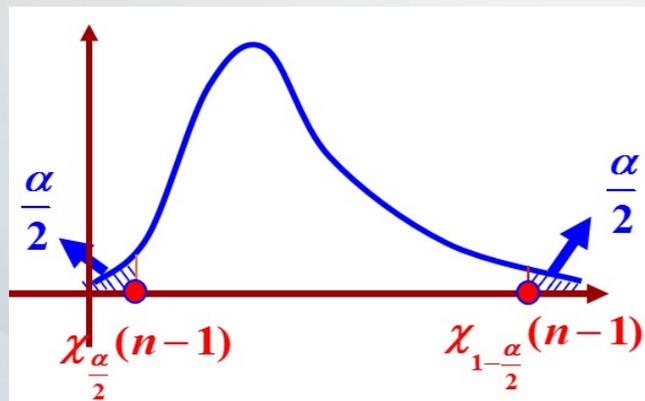


$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域形式为

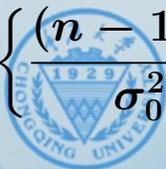
$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > C_1 \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < C_2 \right\}$$

由 χ^2 分布的双尾形式，两边同时截取 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点



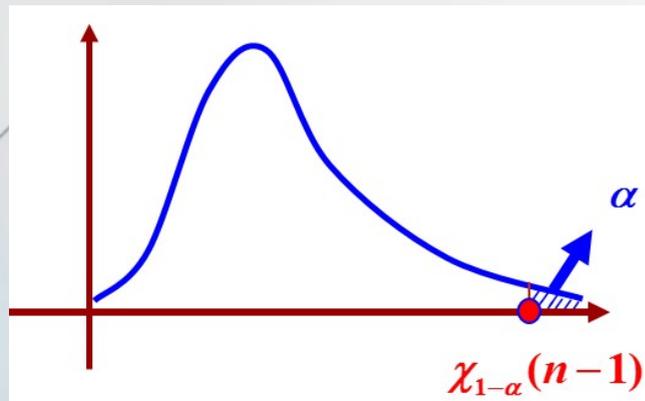
所以

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \right\}$$



$$\textcircled{2} \quad H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

拒绝条件：如果 S^2 比 σ_0^2 大很多，则拒绝 H_0



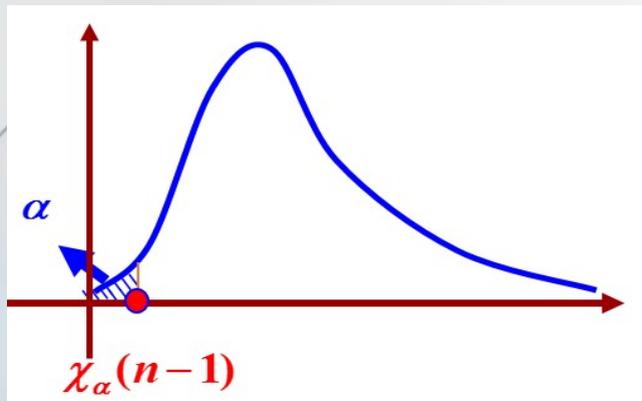
拒绝域：

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \right\}$$



③ $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

拒绝条件：如果 S^2 比 σ_0^2 小很多，则拒绝 H_0



拒绝域：

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(n-1) \right\}$$



其余情形类似。

$$\textcircled{4} \quad H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

拒绝条件：如果 S^2 比 σ_0^2 大很多，则拒绝 H_0

拒绝域：

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \right\}$$

$$\textcircled{5} \quad H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

拒绝条件：如果 S^2 比 σ_0^2 小很多，则拒绝 H_0

拒绝域：

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha}^2(n-1) \right\}$$



例 1.1.1. 某种导线的电阻服从 $N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, 其中一个质量指标是电阻标准差不得大于 0.005Ω , 现从中抽取了 9 根导线, 测其电阻的样本标准差 $s = 0.006$, 试问在 $\alpha = 0.05$ 水平下能否认为这批导线波动合格?

解: (1) 由题意, 提出假设:

$$H_0: \sigma^2 \leq 0.005^2, \quad H_1: \sigma^2 > 0.005^2$$

(2) 选择检验统计量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$;

(3) 拒绝域为

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \right\}$$

(4) 由 $n = 9, s = 0.006, \sigma_0^2 = 0.005^2, \chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(8) = 15.507$, 有



$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 11.52 < 15.507$$

则样本落在拒绝域外，故不拒绝 H_0 ，接受这批导线是合格的。



类比分析：

$$\mu \text{ 的检验 } \begin{cases} \sigma^2 \text{ 已知, } U \text{ 检验法} \\ \sigma^2 \text{ 未知, } T \text{ 检验法} \end{cases}$$

正态总体方差的检验，没有考虑均值 μ 已知的情况呢？

① 可以进行均值 μ 已知，方差 σ^2 检验。

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

② 均值 μ 知道，而方差 σ^2 不知道的情况很少见。

