Mathematical Laboratory

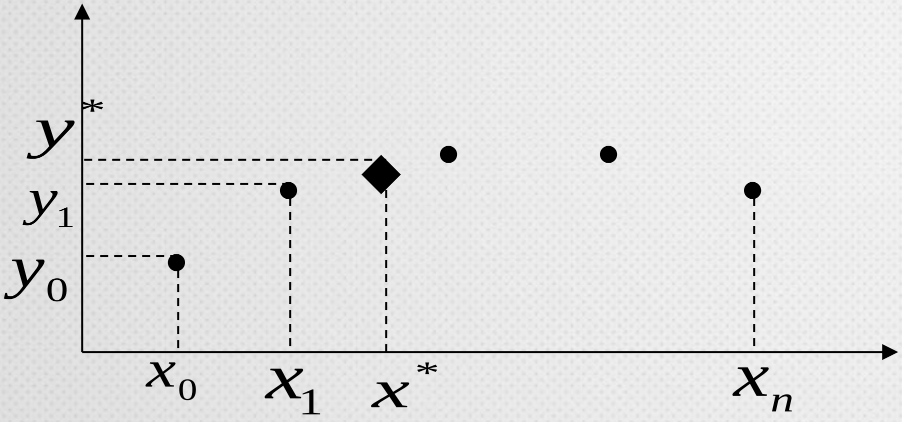
插　值

——一维插值

重庆大学数学与统计学院

已知 n+1个节点 (x_j, y_j) $(j=0,1,\cdots n,$ 其中 x_j 互不相同，不妨设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$,

- 求任一插值点 $x^*(\neq x_j)$ 处的值 y^*.

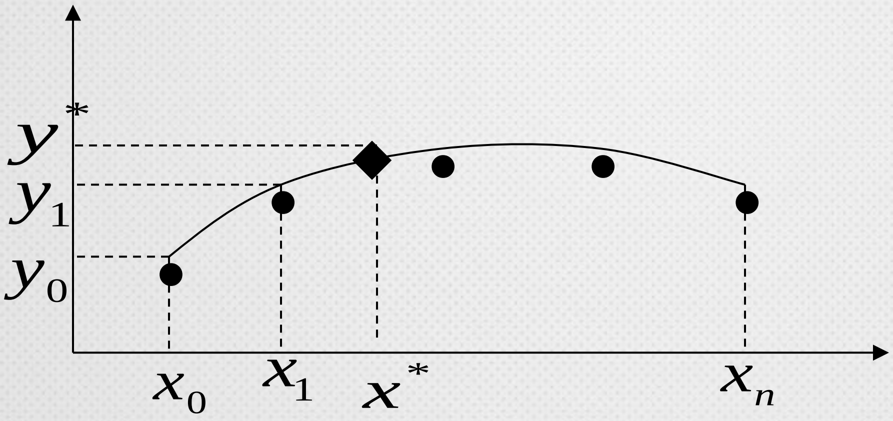


节点可视为由
$y=g(x)$ 产生,函数
g表达式复杂,
或无解析表达式，
或未知.。

构造一个(相对简单的)函数 $y = f(x)$，通过全部节点, 即

$$f(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots n)$$

再用 $f(x)$ 计算插值，即 $y^* = f(x^*)$.



拉格朗日(Lagrange)插值

已知函数$f(x)$在$n+1$个点$x_0,x_1,\ldots,x_n$处的函数值为 $y_0,y_1,\ldots,y_n$。 求一n次多项式函数$P_n(x)$， 使其满足：$P_n(x_i)=y_i,i=0,1,\ldots,n$.

解决此问题的拉格朗日插值多项式公式如下

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\cdot y_i$$

其中$L_i(x)$ 为n次多项式：

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

称为拉格朗日插值基函数。

特别地: 两点一次(线性)插值多项式:

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

三点二次(抛物)插值多项式:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}y_2$$

直接验证可知, $L_n(x)$ 满足插值条件$L_n(x_i)=y_i, i=0,1,\ldots,n$.

例 将$[0, \pi/2]$ n等分，在$g(x)=\cos(x)$上取n+1个节点，作$P_n(x)$（取n=1, 2），计算$P_n(\pi/6)$，与 $\cos(\pi/6)$比较，观察误差。

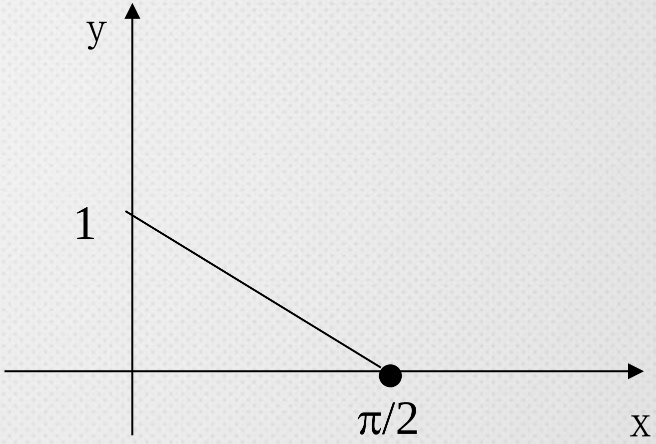
解: $n=1$, $(x_0,y_0)=(0,1)$, $(x_1,y_1)=(\pi/2, 0)$,

$$L_0=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \quad L_1=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$P_1(x)=y_0L_0+y_1L_1=1-2x/\pi$,

$P_1(\pi/6)=0.6667$

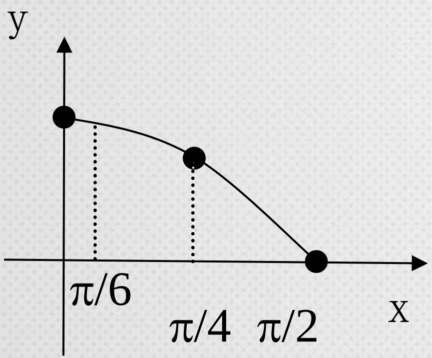
精确值: $\cos(\pi/6)=0.8660$



n=2时: $(x_0,y_0)=(0,1)$, $(x_1,y_1)=(\pi/4, 0.7071)$, $(x_2, y_2)=(\pi/2, 0)$,

$P_2(x)=y_0L_0+y_1L_1+y_2L_2=8(x-\pi/4)(x-\pi/2)/\pi^2-16x(x-\pi/2)0.7071/\pi^2$

$P_2(\pi/6)=0.8508$ **精确值**：$\cos(\pi/6)=0.8660$

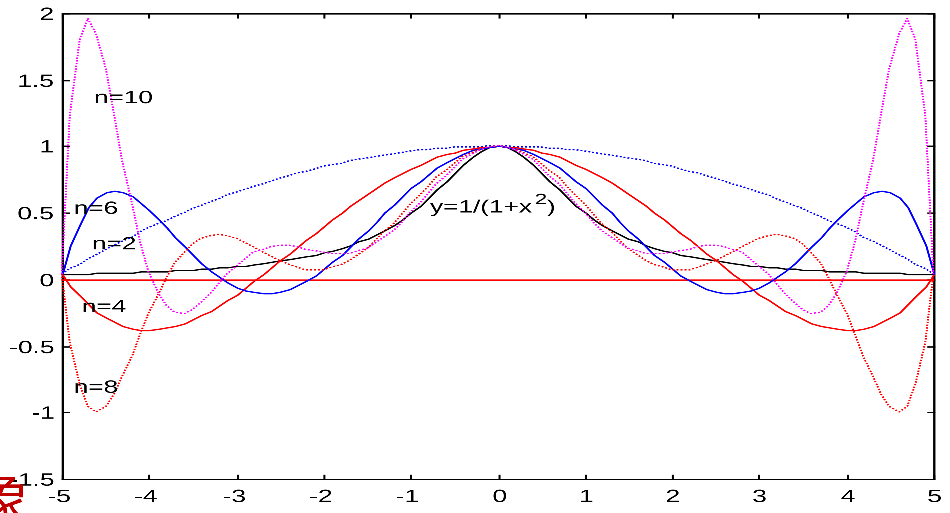


是否n越大,插值的误差就越小?

拉格朗日(Lagrange)插值

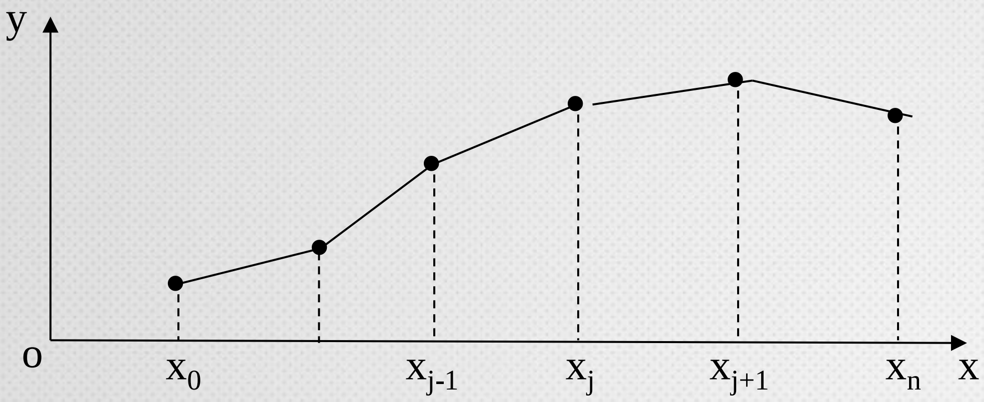
我们来考察 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad -5\le x\le 5$

采用拉格朗日多项式插值：选取不同插值节点个数$n+1$，其中n为插值多项式的次数，当n分别取2, 4,6,8,10时，绘出插值结果如右图.



这种振荡现象叫Runge现象

分段线性插值



$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}\\ 0, & \end{cases}$$

计算量与n无关;n越大，误差越小.

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x)=g(x),\ x_0\le x\le x_n$$

例 $$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -6\le x\le 6$$

用分段线性插值法求插值,并观察插值误差.

1.在[-6,6]中平均选取5个点作插值(xch11)

2.在[-6,6]中平均选取11个点作插值(xch12)

3.在[-6,6]中平均选取21个点作插值(xch13)

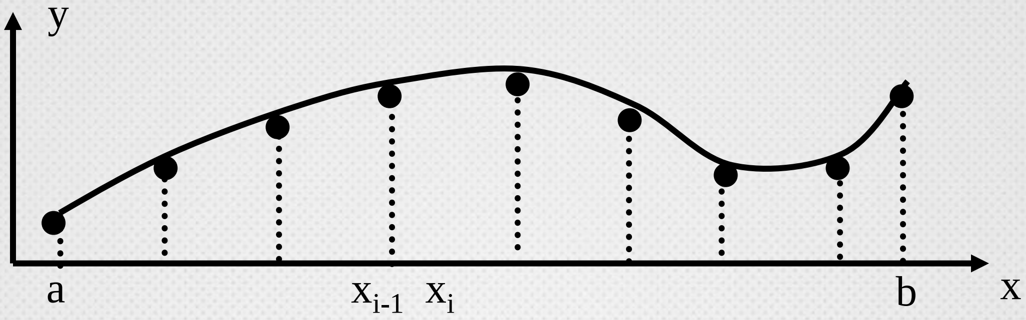
4.在[-6,6]中平均选取41个点作插值(xch14)

To MATLAB

xch11, xch12, xch13, xch14

三次样条插值

分段线性插值在区间端点不光滑



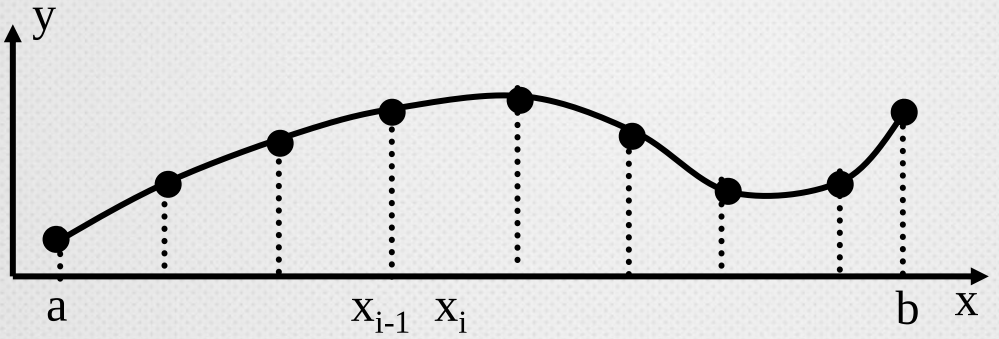
在数学上，光滑程度的定量描述是：函数(曲线)的*k*阶导数存在且连续，则称该曲线具有*k*阶光滑性。

光滑性的阶次越高，曲线则越光滑。是否存在较低次的分段多项式达到较高阶光滑性的方法？

三次样条函数 $S(x)$， $x\in[a, b]$ ， 满足:

1） $S(x)$ 在每一个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上是一个三次多项式函数 ；

2） 在整个区间$[a, b]$上，其二阶导数存在且连续。



问题：给定$n+1$个节点（x_0, y_0），（x_1, y_1），…，（x_n, y_n），

求一个三次样条函数$S(x)$，使其满足：

$$S(x_i)=y_i,\ i=0, 1, \cdots, n.$$

如何确定三次样条函数在每一个小区间上的三次多项式函数的系数？

三次样条插值函数

$$S(x)=\{s_i(x), x\in[x_{i-1}, x_i], i=1,\cdots n\}$$

$4)\ S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (自然边界条件）

应满足的条件：

1) $s_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i\quad(i=1,\cdots n)$

2) $S(x_i)=y_i\quad(i=0,1,\cdots n)$

3) $S(x)\in C^2[x_0, x_n]$

4) $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (自然边界条件）

•待定系数和方程个数

参数：每个小段上4个参数，n个小段共计$4n$个方程：

1) 每个小段上由给定函数值得到2个，n个小段共计$2n$个；

2) 光滑性要求每一个内部节点的一阶二阶导数连续，得出其左右导数相等，因此，每个节点产生2个方程，共计$2(n-1)$ 个 。现在得到了$4n-2$个方程。为了求解4n个方程，常用的方法是对边界节点除函数值外附加要求，这就是所谓的边界条件。需要两个，正好左右两个端点各一个。

用三次样条插值选取11个基点计算插值（ych）

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -6\le x\le 6$$

To MATLAB
ych(larg1)

一维插值方法总结

拉格朗日插值（高次多项式插值）：其插值函数在整个区间上是一个解析表达式，便于再次开发利用；曲线光滑；误差估计有表达式；收敛性不能保证（振荡现象）。用于理论分析，实际意义不大。

分段线性和三次样条插值（低次多项式插值）：曲线不光滑（三次样条插值已大有改进）；误差估计较难（对三次样条插值）；收敛性有保证。简单实用，应用广泛。

Thanks