古典概率

教学设计与制作：胥斌

等可能性

{正,反}

p=1/2

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

p=1/6

?

掷两枚骰子共有36个样本点：

$$\{(1,1)\quad (1,2)\quad \boxed{(1,3)}\quad (1,4)\quad (1,5)\quad (1,6)$$
$$(2,1)\quad \boxed{(2,2)}\quad (2,3)\quad (2,4)\quad (2,5)\quad (2,6)$$
$$\boxed{(3,1)}\quad (3,2)\quad (3,3)\quad (3,4)\quad (3,5)\quad (3,6)$$
$$(4,1)\quad (4,2)\quad (4,3)\quad (4,4)\quad (4,5)\quad (4,6)$$
$$(5,1)\quad (5,2)\quad (5,3)\quad (5,4)\quad (5,5)\quad (5,6)$$
$$(6,1)\quad (6,2)\quad (6,3)\quad (6,4)\quad (6,5)\quad (6,6)\}$$

$P\{\text{点数和为}4\}=3/36=1/12$；

掷两枚骰子共有36个样本点：

$$
\begin{array}{cccccc}
\{(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \boxed{(1,6)} \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \boxed{(2,5)} & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \boxed{(3,4)} & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & \boxed{(4,3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & \boxed{(5,2)} & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
\boxed{(6,1)} & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\}
\end{array}
$$

$P\{$点数和为$7\}=6/36=1/6$；

掷两枚骰子共有36个样本点：

{(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	$\boxed{(2,2)}$	(2,3)	$\boxed{(2,4)}$	(2,5)	$\boxed{(2,6)}$
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	$\boxed{(4,2)}$	(4,3)	$\boxed{(4,4)}$	(4,5)	$\boxed{(4,6)}$
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	$\boxed{(6,2)}$	(6,3)	$\boxed{(6,4)}$	(6,5)	$\boxed{(6,6)\}}$

$P\{\text{点数都为偶数}\}=9/36=1/4$;

归纳

$P\{$点数和为4$\}=3/36=1/12$；

有利场合数

$P\{$点数和为7$\}=6/36=1/6$；

$P\{$点数都为偶数$\}=9/36=1/4$；

试验的特点：样本点总数有限+样本点等可能出现

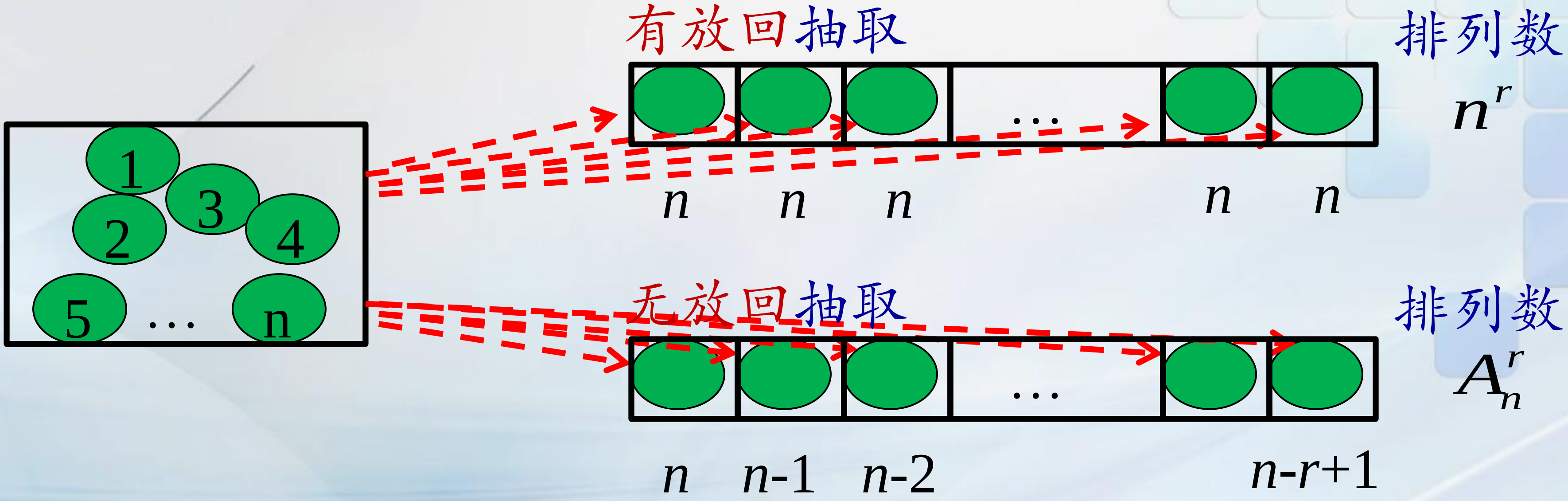
古典概型

古典概型中事件 A 的概率 $P(A)$ 为：

$$P(A)=\frac{A\text{的样本点数 } r\text{（有利场合数）}}{\text{样本点总数 } n\text{（样本空间大小）}}$$

一般情况下，该如何计算 n 和 r 呢？

排列数



$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)$$

组合数

排列 $=$ $\boxed{\text{先选取}r\text{个数}}$，$\boxed{(r\text{个数})\text{再排}}$成一排

$$A_n^r = C_n^r \times r!$$

从n个数中选取r个，共有

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

种选法

例1（取数问题）从0~9十个数中任取5个数，求下列事件的概率。

事件A：有放回选取，最大数不超过7；

事件B：无放回选取，最大数不超过7；

事件C：(无放回选取)依次排成一排，能构成5位奇数。

解 分析：选取方式不同，则试验不同，则样本空间不同；事件包含于样本空间，若事件考虑了次序(排列)，则样本空间大小的计算必须考虑次序(排列)。

$P(A)$: $n_A = 10^5$ ，$r_A = 8^5$ 则， $P(A) = \dfrac{r_A}{n_A} = 0.8^5$

$P(B)$: $n_B = A_{10}^5$ ，$r_B = A_8^5$ 则，

$$P(B) = A_8^5 / A_{10}^5 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} \boxed{= C_8^5 / C_{10}^5} = 2/9$$

$P(C)$： $n_C = n_B = A_{10}^5$ ，关键计算 r_C

首位				个位
$\neq 0$				可取1,3,5,7,9

先难后易：先满足要求高的，再满足要求低的

排个位：5选1排1位， A_5^1

排首位：8选1排1位， A_8^1

排中间：8选3排3位， A_8^3

$$r_C = A_5^1 A_8^1 A_8^3$$

$$P(C) = \frac{A_5^1 A_8^1 A_8^3}{A_{10}^5}$$

例2（分房问题）将n个人等可能地分配到N间房$(n \le N)$，一个人只能选一间房，而一间房可容纳多个人。求下列事件的概率。

事件A：指定的n间房中，一人一房；

事件B：恰有n间房，一人一房；

事件C：指定的某间房中有m个人$(m \le n)$。

解 样本空间 $n_\Omega = N^n$ （有放回排列）

$P(A)$：n个人无放回地选指定的n间房，则 $r_A = A_n^n = n!$

$P(B)$：n个人无放回地选未指定的n间房 $r_B = C_N^n n!$

$$P(A) = \frac{r_A}{n_\Omega} = \frac{n!}{N^n} \qquad P(B) = \frac{r_B}{n_\Omega} = \frac{C_N^n n!}{N^n}$$

$P(C):$

$$n \xrightarrow{C_n^m} m \xrightarrow{\text{选指定的1间房}} 1^m$$

$$n \longrightarrow n\text{-}m \xrightarrow{\text{选其余}N\text{-1间房}} (N-1)^{n-m}$$

$$r_C = C_n^m 1^m (N-1)^{n-m}$$

则 $P(C) = \dfrac{C_n^m 1^m (N-1)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\dfrac{1}{N}\right)^m \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n-m}$

小结

- 古典概型定义
- 利用排列组合公式计算古典概率