99全国大学生数模竞赛

A题　自动化车床管理

题目

一道工序用自动化车床连续加工某种零件，由于刀具损坏等原因该工序会出现故障，其中刀具损坏故障占95%，其它故障仅占5%。工序出现故障是完全随机的，假定在生产任一零件时出现故障的机会均相同。工作人员通过检查零件来确定工序是否出现故障。现积累有100次刀具故障记录，故障出现时该刀具完成的零件数如附表。现计划在刀具加工一定件数后定期更换新刀具。

已知生产工序的费用参数如下：

故障时产出的零件损失费用 f=200元/件；

进行检查的费用 t=10元/次；

发现故障进行调节使恢复正常的平均费用 d=3000元/次(包括刀具费)；

未发现故障时更换一把新刀具的费用 k=1000元/次。

1)假定工序故障时产出的零件均为不合格品，正常时产出的零件均为合格品，试对该工序设计效益最好的检查间隔（生产多少零件检查一次）和刀具更换策略。

2)如果该工序正常时产出的零件不全是合格品，有2%为不合格品；而工序故障时产出的零件有40%为合格品，60%为不合格品。工序正常而误认有故障仃机产生的损失费用为1500元/次。对该工序设计效益最好的检查间隔和刀具更换策略。

3）在2)的情况，可否改进检查方式获得更高的效益。

附表

附:100次刀具故障记录(完成的零件数)

459	362	624	542	509	584	433	748	815	505
612	452	434	982	640	742	565	706	593	680
926	653	164	487	734	608	428	1153	593	844
527	552	513	781	474	388	824	538	862	659
775	859	755	649	697	515	628	954	771	609
402	960	885	610	292	837	473	677	358	638
699	634	555	570	84	416	606	1062	484	120
447	654	564	339	280	246	687	539	790	581
621	724	531	512	577	496	468	499	544	645
764	558	378	765	666	763	217	715	310	851

自动化车床最优刀具检测更换模型

.1　　问题的提出(略)

2. 基本假设

(1)假设在生产任一零件时出现故障的机会均相同；

(2)假设无论95%的刀具损坏故障还是5%的其它故障，发生故障并使恢复正常的平均费用均为3000元/次。

(3)假设问题2中工序正常时而误认为有故障停机产生损失费用(15元/次)不包括 刀具费用，即发现检查有误时不进行换刀。

(4)假设发现故障和停机维修所用的霎时间可忽略不计

(5)假设生产任一零件所需时间相同，设为1。

(6)假设检查时不停止生产，只在检查出不合格零件时才停止生产进行维修。

(7)假设提供的刀具故障记录数据是独立同分布的。

(8)假设5%的其它故障不予考虑。

3. 符号说明

Tc 检查零件的单位时间间隔

T 定期换刀的单位时间间隔。

T(C) 以检测时间间隔为TC时，系统工序合格零件的单期望损失。

c* 以经济损失最小为目标的最优检查的时间间隔。

Tc* 以经济损失最小为目标的最优检查的时间间隔。

T* 以经济损失为目标的最优的换刀间隔。

T(C)* 在Tc*和T*的情况下，系统工序合格零件的最小单位期望损失。

f(x) 系统的失效概率密度函数

F(x) 累计失效概密度函数，亦即寿命分布函数。

f 故障时产出的零件损失费用200元/件。

t 检查的费用10元/次。

d 发现故障进行调节使恢复正常的平均费用3000元/次(包括刀具费)。

k 未发现故障时更换刀具的费用1000元/次。

u 刀具平均寿命。

δ 样本方差。

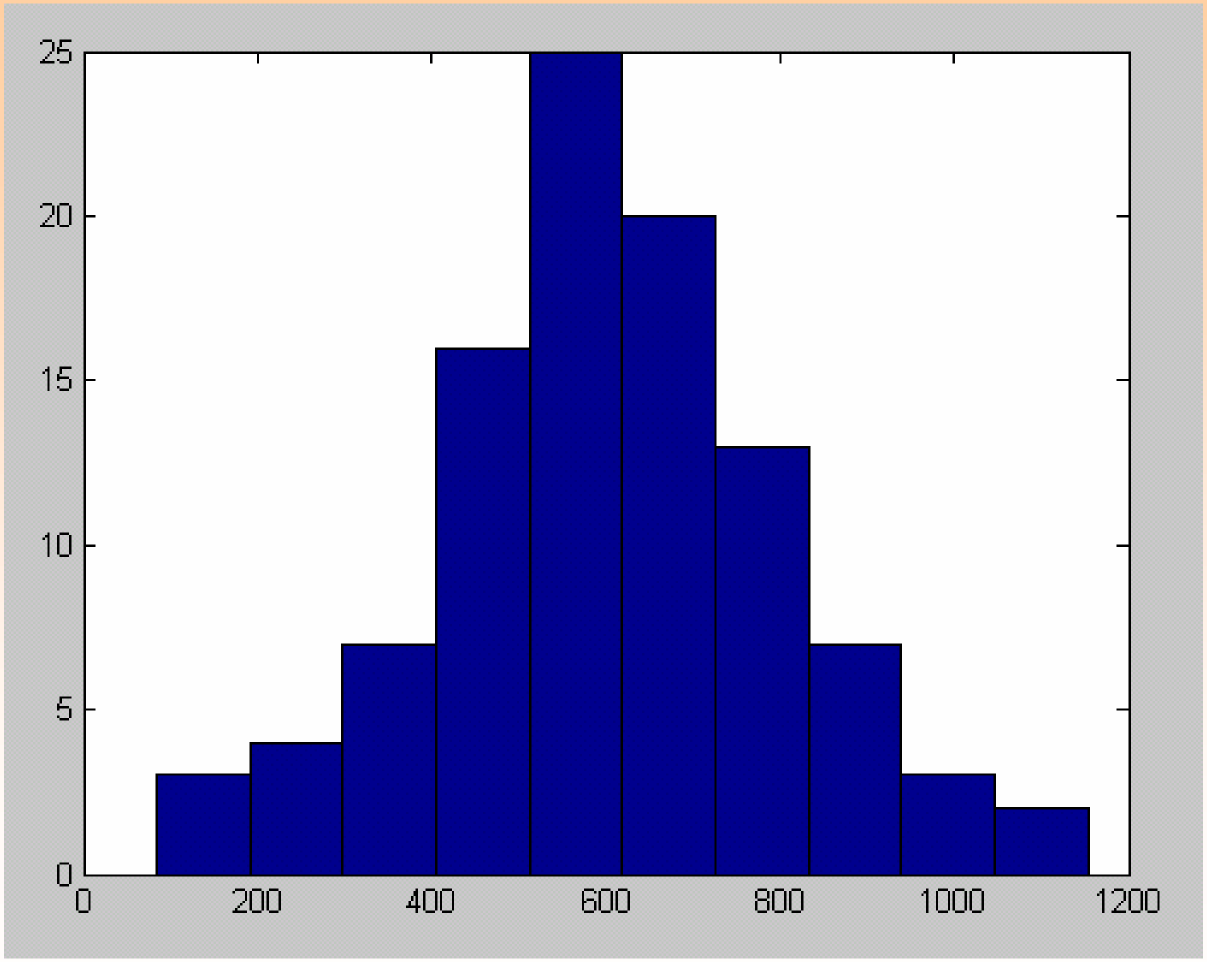
4. 模型的建立与求解

- 建立模型前的数据处理
- 模型一
- 对模型一的改进
- 模型 二
- 对模型二检查方式的改进(问题3的解答)

4.1 建立模型前的数据处理

- 使用MATLAB软件包 对 100次刀具故障记录数据处理作直方图。
- 用分布拟合检验法可以证明刀具故障数近似服从正态分布

刀具故障记录数据直方图



假设 H_0: 系统的失效概率密度为

$$f(t)=f_N(t;o^2,x)=\frac{1}{o\sqrt{2p}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2o^2}}$$

由极大似然估计法可得

$$\hat{u}=600;\hat{o}=1966292$$

将(0-1200)分为 12 个区间，若 H_0:为真，则失效概率密度为

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2p}\times 1966292}e^{-\frac{(t-600)^2}{2o^2}}$$

按上式查标准正态分布表可得概率 p_i

于是

$$\sum_{i=1}^{12}(f_i-np_i)^2/np_i=4.09$$

因为

$$c^2_{0.05}(12-2-1)=c^2_{0.05}(9)=16.919>4.09$$

所以接受假设，在显著性水平为 0.05 下接受总体服从正态分布。

4.2　模型一

首先建立以合格零件的单位期望损失为目标函数的数学模型。

系统工序合格零件的单位期望损失

$$T(C)=\frac{\text{系统工序的期望总损失}\mathbf{U}_{\text{总}}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}$$

- 4.2.1 系统工序的期望总损失U总
- 4.2.2 系统工序产生的合格零件总数
- 4.2.3 模型一的求解

4.2.1系统工序的期望总损失$U_{总}$

假设自动化车床在连续运行中将发生N次更新过程(每次换刀或者维修换刀为一次更新过程)，即包括到固定换刀间隔才换刀和发生故障后立即换刀两类情况。

N次更新刀具的过程又可分为两种情况：

1. 换刀间隔T前尚未出现故障，设总损失为U_1，
2. 换刀间隔T前就出现了故障，设总损失为U_2，

则 $$U_{总} = U_1 + U_2$$

换刀间隔T前尚未出现故障

发生这种情况的更新间隔均为T， 出现的次数等于刀具更新的总次数乘以以T为更新间隔情况下换刀前仍未出现故障的概率，即N[1-F(T)]，

因此定期换刀前未出现故障的情况下的总损失U_1等于这种情况下的刀具更新次数N[1-F(T)]乘以单位更新过程的损失费用P_1 ： 即$U_1 = N[1-F(T)] P_1$

注：其中F(T)为以T为更新周期的情况下工序出现故障的概率，F(t)表示累计失效密度函数(寿命分布函数)，即为前面的失效概密度函数的积分：

$$F(t)=\int_0^t f(x)dx,$$

F(T)是t=T时F(t)的取值。

换刀间隔T前就出现了故障

换刀间隔T前便出现了故障，这时在故障发生后进行检查并维修换刀，从而完成了一个更新过程，这种情况下总的发生次数等于总更换次数乘以系统中发生这种情况的概率，即N F(T) 。

因此定期前出现故障的情况下的总损失U_2等于这种情况下的刀 。 具更新次数NF(T)乘以单位更新过程的损失费用P_1 ：即U_2 =NF(T) P_2。

$$U_{总} = N[1-F(T)]P_1 + NF(T)P_2$$

- 到换刀间隔T尚未出现故障时一次更新所消耗的费用P_1;
- 换刀时已出现 故障的一次更新过程所消耗的费用P2;
- 工序总的期望损失

$$P_1 = \mathrm{int}(\frac{T}{Tc}) \times t + k + 0$$

- **(1)检查费用：检查费用等于检查的次数乘以单次检查所需 的费用。**
- **(2)换刀费用：k**
- **(3)不合格零件损失费用：0**

$$P_2 = \frac{1}{F(T)}\int_0^T \{[Int(\frac{x}{Tc})+1]t + [Tc - \mathrm{mod}(\frac{x}{Tc})]f\} f(x)dx + d$$

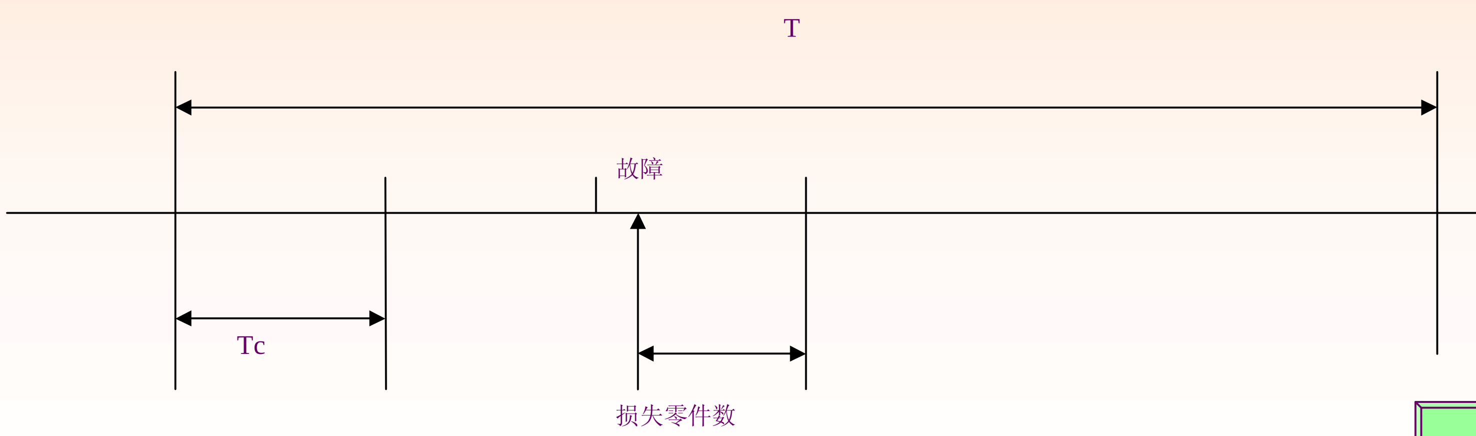
(1)发生故障时的维修换刀费用：d

(2)故障维修前的所有损失费用：

$$\frac{\int_0^T W_x f(x)dx}{F(T)}$$

任意位置发生故障的损失费用：

Wx=检查费用+零件损失费用



工序总的期望损失

$$U_{总} = U_1 + U_2$$

$$U_1 = N[1 - F(T)]P_1 = N[1 - F(T)][\mathrm{int}(\frac{T}{Tc}) \times t + k + 0]$$

$$U_2 = NF(T)P_2 = NF(T)[\frac{1}{F(T)}\int_0^T \{[Int(\frac{x}{Tc}) + 1]t + [Tc - \mathrm{mod}(\frac{x}{Tc})]f\} f(x)dx + d]$$

4.2.2 系统工序产生的合格零件总数

- 系统工序产生的合格零件总数：换刀前没发生故障情况产生的合格零件总数+换刀前发生故障情况下的合格零件总数，即

$$N[1-F(T)]T+NF(T)\int_0^T x\frac{f(x)}{F(T)}dx$$

系统工序合格零件的单位期望损失

$$T(C)=\frac{\text{系统工序的期望总损失}\mathbf{U}_{\text{总}}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}$$

$$=\frac{U_1+U_2}{N[1-F(T)]T+NF(T)\int_0^T x\frac{f(x)}{F(T)}dx}$$

$$U_1=N[1-F(T)]P_1=N[1-F(T)][\mathrm{int}(\frac{T}{Tc})\times t+k+0]$$

$$U_2=NF(T)P_2=NF(T)[\frac{1}{F(T)}\int_0^T\{[Int(\frac{x}{Tc})+1]t+[Tc-\mathrm{mod}(\frac{x}{Tc})]f\}f(x)dx+d]$$

4.2.3 模型一的求解

$$T(C)=\frac{\text{系统工序的期望总损失}\mathbf{U}_{\text{总}}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}$$

$$=\frac{U_1+U_2}{N[1-F(T)]T+NF(T)\int_0^T x\frac{f(x)}{F(T)}dx}$$

- 上式中N可以略去，式子变成以T，Tc为变量，T(c)为目标函数的方程。为使T(c)最小，可以利用计算机进行穷举法求解。首先选取T=50为步长进行求解比较，求得T=400，Tc=16时出现最优解，然后在T∈**(350,450)**之间逐一进行比较，从而得到模型的最优解为：
- **T(c)*=4.615,T*=369,Tc*=18**

4.3 对模型一的进一步改进

- 由于故障记录满足正态分布，因此在等检查间隔内生产的不合格零件数并不相等，即故障发生在各间距内的概率并不相等。为了使在任意检查区间内故障发生的概率积累均相同，根据正态分布规律，在工序运行中期故障发生的可能性最大，因此检查 间隔应按由大-小-大的方式进行。这样相对于等间隔检查更加合理。
- 得到的更优解为：$T(c)^*=4.405, T^*=369, area^*=0.008$
- 效益更好，期望损失降低了5%。

4.4 模型二

模 型二需要增加考虑两种情况：

一种是在工序正常工作时有可能检查 到2%的不合格零件而误认为出现故障停机，发现误检后不进行换刀，继续正常工作，每次误停机的损失为1500元。

第二种情况是工序故障时检查到40%的合格零件而认为工序正常的错误，这样会增加不合格零件的数量和相应增加不必要的检查，从而增加损失。

模型二的建立(问题2的解答)

同模型一，系统工序合格零件的单位期望损失：

$$T(C)=\frac{\text{系统工序的期望总损失}\mathbf{U}_{\text{总}}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}$$

- 4.4.1 系统工序的期望总损失U总
- 4.4.2 系统工序产生的合格零件总数
- 4.4.3 模型二的求解

4.4.1系统工序的期望总损失$U_{总}$

仍假设整个系统包含N次更新过程

N次更新刀具的过程又可分为两种情况：

1). 换刀间隔T前尚未出现故障，设总损失为U_1，

2). 换刀间隔T前就出现了故障，设总损失为U_2 ，

同样

$$U_{总} = U_1 + U_2$$

$$U_1 = N[1-F(T)]\ P_1$$

$$U_2 = N\ F(T)\ P_2$$

下面研究

换刀前未出现故障的更新过程的单位损失费用P_1

换刀前出现故障的更新过程的单位损失费用P_2

1.换刀前未出现故障的更新过程的单位损失费用P_1

- (1)检查费用：检查费用等于检查的次数乘以单次检查所需的费用:g_1t。
- (2)一次换刀费用：k
- (3)误停机损失费用：$2\%g_1 \times 1500 = 30g_1$
- (4)不合格零件的损失费用：$Tf \times 2\%$

所以 $P_1 = k + g_1t + 30g_1 + 2Tf\%$,

其中

$$g_1 = Int(\frac{T}{Tc})$$

2.换刀前出现故障的更新过程的单位损失费用P_2

单位刀具更换间隔内的平均损失费用P_2为：

$$\int_0^T W_x \frac{f(x)}{F(T)} dx$$

在**x**处发生故障的平均损失费用W_x包括：

(1)发生故障前的检查费用：**g_2t(g_2**表示发生故障前的检查次数**)**

(2)发生故障前由于误检停机造成的损失费：**g_2*2%*1500=30g_2**

(3)正常工序中**2%**的不合格零件造成的损失：**2%xf**

(4)发生故障后检查所需费用：

(4)发生故障后的平均检查费用：

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{g_1-g_2-1} 0.4^i t, & (g_1 > g_2) \\ 0 \qquad , & (g_1 = g_2) \end{cases}$$

(5)维修换刀的损失费用：**d**

(6)发生故障后所产生的不合格零件的平均损失费用：

$$\begin{cases} \{[T_c - \mathrm{mod}(\frac{x}{T_c})] + 0.4T_c + 0.4T_c{}^2 + \ldots + 0.4^{g_1-g_2-1}T_c\} \times 0.6f, & (\mathrm{g}_1 > g_2) \\ (T-x) \times 0.6f \qquad , & (\mathrm{g}_1 = g_2) \end{cases}$$

Wx为上述各项费用之和。

4.4.2 系统工序产生的合格零件总数

合格零件总数包括

- 1 换刀前未发生故障所产生的总的合格零件个数N_1：$N_1=N[1-F(T)]T\times 98\%$
- 2 换刀前发生故障所产生的总的合格零件个数：

$$N_2=NF(T)\int_0^T\{98\%x+V\times 0.4\}\frac{f(x)}{F(T)}dx$$

其中，$$V=\begin{cases}[(T_c-Int(\frac{x}{T_c}))+0.4T_c+0.4^2T_c+\ldots+0.4^{g_1-g_2-1}T_c], & (g_1>g_2)\\ T-x, & (g_1=g_2)\end{cases}$$

V表示发生故障后所生产的产品数

4.4.3 模型二的求解

$$T(C)=\frac{U_{总}}{\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2}$$

只需确定**T**和**Tc**的值使**T(C)**达到最小即可，同模型一的解法。求得：

$T(c)^*=9.268, T^*=306, Tc^*=28$

同模型一的改进，对模型二进行不等间隔检查，求得：

$T(c)^*=9.047, T^*=316, area^*=0.017$

4.5 对模型二检查方式的改进(问题3的解答)

对于问题二，由于工序正常时产出的零件仍有2%为不合格品，而工序故障时产生的零件有40%为合格品，这样工作人员在通过定期检查单个零件来确定工序是否出现故障的检查方式必然会导致正常工序时因检查到不合格零件而误认为出现故障停机的错误和工序发生故障后检查到的仍是合格品而认为工序正常的错误，都将造成很大损失。为了减少损失，可以采取以下策略：

当检查到一个零件为合格品时，再检查一个零件，若仍是合格品则判断工序正常，若为不合格品则判断系统工序出故障，这样虽然会相应增加检查的费用，但大大降低了因误检而造成的损失，从而使系统工序获得更高的效益。

5. 对模型的评价和改进

- (略)

完