

人口模型

人口问题是当今世界上人们最关心问题。因为资源的原因，应有效的正确的人口措施——人口模型。而建立人口模型的目的不外乎预测和控制，Logistic模型是其中比较精细的人口模型。

主要内容

基本假设

相关参数

一般模型

问题分析

图例分析

补充说明

进一步思考的问题



基本假设

影响人口增长的因素很多：人口的基数，人口的自然增长率和各种扰动因素。对问题适当简化，建立粗糙的模型。

人口的增长只考虑单位时间内的人口增长与人口的关系。

有某一具体时刻的人口资料作为参数对照。



相关参数

N_m : 自然环境容许的最大人口数。

$N(t)$: t 时刻的人口数。

r : *Malthus* 比例常数。

$r(1 - \frac{N}{N_m})$: 净增长率。对 r 作修整。



一般模型

一般说来一个国家工业化越高，它的生活空间就越多，食物就越多，从而 N_m 就越大。对于净增长率 $r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)$ ，即人口趋于饱和时，净增长率趋于0。

基于以上假设，有以下结论：

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$



解此Bernoulli方程，可得：

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + e^{(-rt)} - c_1 N_m}$$

又： $N(t_0) = N_0$

可得：
$$N(t) = \frac{N_m}{1 + \left(\frac{N_m}{N} - 1 \right) e^{-r(t-t_0)}}$$



问题分析

对 进行分析：

$t \rightarrow \infty$ 时 $N(t) \rightarrow N_m$ ，即无论人口初值如何，
人口总数趋于极限值 N_m

$0 < N_0 < N_m$ 时， $\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) N > 0$ ，所以

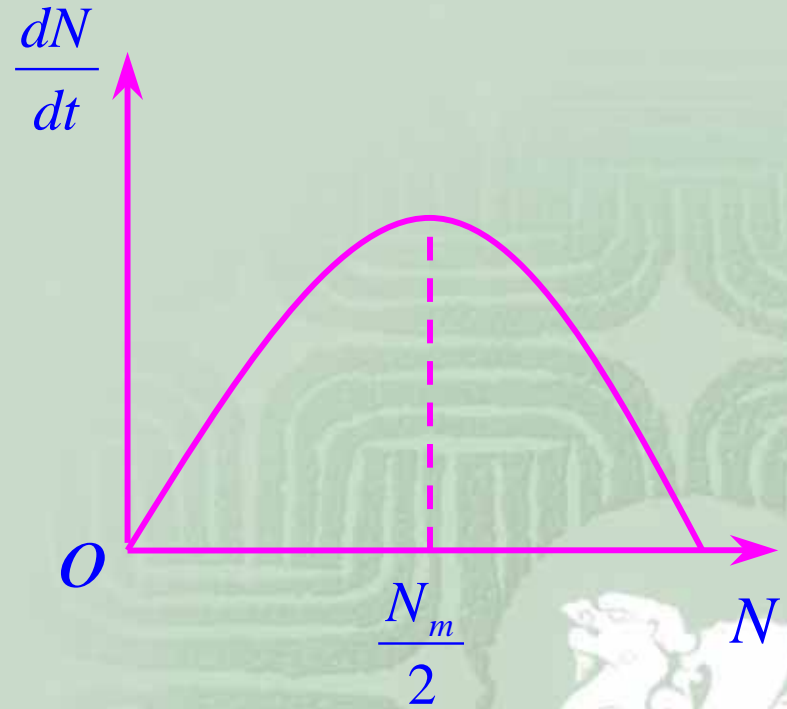
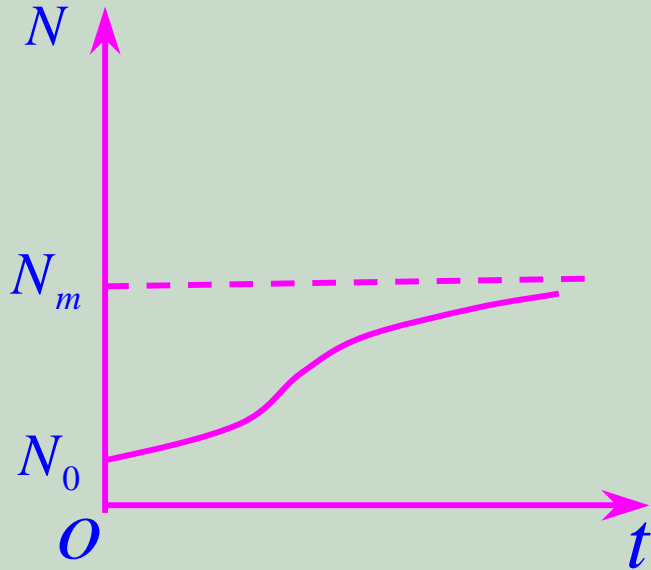
$N(t)$ 是时间 t 的单调递增函数，又：

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = r^2 \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) \left(1 - \frac{2N}{N_m} \right) N$$



由 显然：

当 $N < \frac{N_m}{2}$ 时， $\frac{d^2N}{dt^2} > 0$ ，曲线上凹；当 $N > \frac{N_m}{2}$ 时， $\frac{d^2N}{dt^2} < 0$ ，曲线下凹。



图例分析

从上图曲线走势分析：

人口增长率 $\frac{dN}{dt}$ 由增变减，在 $\frac{N_m}{2}$ 处最大，即在人口总数达到极限值一半以前是加速生长时期。过这一点以后，生长的速率逐渐变小，并且在达到人口极限值时变为零，这是减速生长时期。

某些生物学家估计， r 的自然为0.029，当人口总数为 3.6×10^9 时，人口每年以2%的率增长。

由Logistic模型：

$$\left(\frac{1}{N}\right)\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)$$

从而： $N_m = 9.86 \times 10^9$

这是对未来人口的预测。



补充说明

人也是一种生物，所以Logistic模型原则上适用自然环境下作为单一的物种生存的其它生物。

Logistic模型是在Malthus模型的基础上建立起来的Logistic模型对于Malthus模型的 r 作了修整（附表为两模型数据比较）。



年	实际人口 10 ⁶	指数模型		Logistic模型	
		10 ⁶	误差%	10 ⁶	误差%
1800	5.3				
1820	9.6	10.0	4.2	9.7	1.0
1840	17.1	18.7	9.4	17.4	1.8
1860	31.4	35.0	10.8	30.2	-3.9
1880	50.2	65.5	30.5	62.4	-0.6
1890	62.9	89.6	42.4	62.4	-0.8
1900	76.0	122.5	61.2	76.5	0.7
1910	92.0	167.6	82.1	91.6	-0.4
1920	106.5	229.3	115.3	107.0	0.5
1930	123.2			122.0	-1.0
1940	131.7			135.9	3.2
1950	150.7			148.2	-1.7
1960	179.3			158.8	-11.4
1970	204.0			167.6	-17.8
1980	226.5				

进一步思考的问题

人口模型还有哪些？

Logistic模型可否进一步改进？

