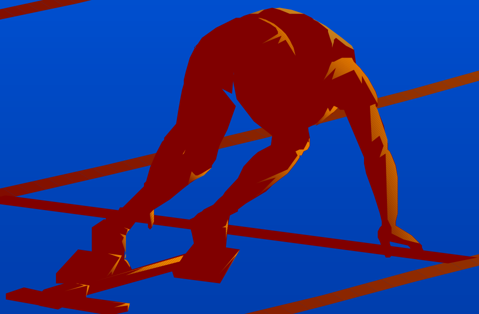
体育问题



根据运动员能发挥出来的最大冲力;来自体内和体外的阻力系数；氧的新陈代射作用提供能量的速度；体内贮存能量的初始值等参数建立了赛跑的最优速度分配模型，并利用模型对赛跑成绩的理论值与世界纪录的实际值进行了对比。

主 要 内 容

建模过程

生理参数的确定

模型检验

进一步的思考

寻求使赛跑成绩最好的所谓最优速度分配是一个涉及生理学和动力学的复杂问题。

T.B.Keller提出了一个简单模型，根据**4**个生理参数，可以确定最优速度，并预报比赛成绩。这些参数是：运动员能发挥出来的最大冲力**F;**来自体内和体外的阻力系数τ；氧的新陈代射作用提供能量的速度σ；体内贮存能量的初始值E_0。它用**50**码到**1000**米共**22**个当时的世界纪录拟合了这些参数。

根据**Keller**的模型，当赛程不超过**291**米时，运动员应一用最大冲力跑；赛程超过**291**米时，则先用最大冲力跑一二秒钟，然后匀速跑过绝大部分赛程，最后的一、二秒钟减速，把贮存的能量耗尽。

下面先介绍建模过程，再给出上面**4**个生理参数的拟合值，并比较赛跑成绩理论值与世界纪录的实际值。

建模过程

设赛跑距离为 D，运动员跑的时间为T，速度为$v(t)$，则：

$$D = \int_0^T v(t)dt \qquad (1)$$

现在的问题是，当 D 一定时，如何安排$v(t)$，使T最小？

它的对偶问题是，在 T 一定如何安排$v(t)$，使 D 最大？这两个问题等价，从（1）式可以看出，研究后者更为方便。

因为速度$v(t)$受运动员的体力和赛跑时阻力的制约，假定赛跑时来自体内外的阻力与速度成正比。设运动员的冲力为 $f(t)$，根据牛顿第二定律可以得到：

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = f(t) \\ v(0) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

冲力 $f(t)$ 是运动员自己控制的（来自血液对肌肉供氧和肌肉收缩），所以问题归结为寻求控制 $f(t)$ 的最优策略，使在 T 一定下由（1）和（2）所确定的 D 达到最大 $f(t)$ 受到两个因素限制：一方面，运动员有他能发挥出来的最大冲力 F，即有：

$$f(t) \le F \qquad (3)$$

另一方面，单位时间所需要的能量等于运动员的冲力与速度的乘积 fv。这个能量取决于身体所能提供的等价氧量。

记 $E(t)$ 为贮存于身体肌肉中的于氧量等价的能量，σ 为单位时间内提供的与氧量等价的能量，由于单位时间内提供的能量与消耗的能量 fv 之差是贮存能量 $E(t)$ 的变化率，则有：

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \sigma - fv \\ E(0) = E_0 \end{cases} \qquad (4)$$

这里 E_0 为体内贮存的能量初始值。

这样，此问题归结为在假定4个生理参数已知情况下求满足(2)—(4)的 $v(t)$，使在T 一定时由(1)式确定的 D最大。由于有3个未知函数$v(t), E(t), f(t)$，显然无法从两个微分方程直接确定，需要在求解过程中做一些合理的假定，这是一个最优控制问题，根据赛跑特点，Keller将它分为3个阶段，在赛跑的初始阶段以冲力 $f(t)$为控制量，选定 $f(t)$，求其他函数；在最后阶段以贮存的能量 $E(t)$为控制量，下面分别讨论。

(1) 初始阶段 $0 \le t \le t_1$ (t_1代定)。欲使 $v(t)$由 $v(0)=0$ 迅速增加，应以最大冲力加速跑，即令 $f(t)=F$，代入(2)为：

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{\tau}=F \\ v(0)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

其解为：

$$v(t) = F\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \qquad (6)$$

将 $f = F$ 及(6)式代入方程(4)得：

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \sigma - F^2\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ E(0) = E_0, E(t) \geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

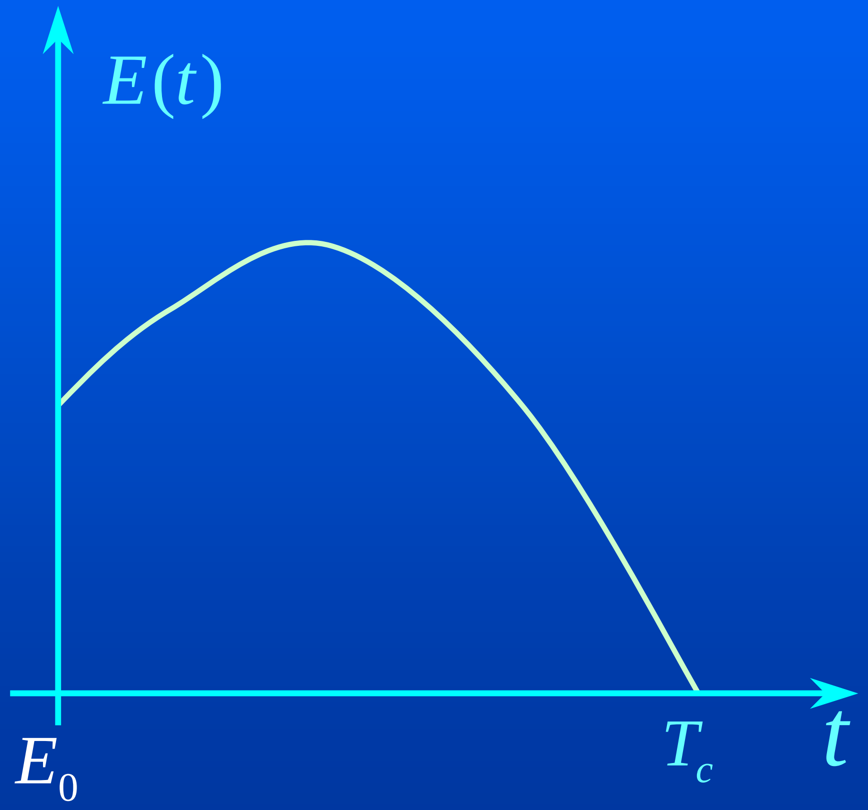
其解为：

$$E(t) = E_0 + t\left(\sigma - F^2\tau\right) + F^2\tau^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (8)$$

上式中必有 $(\sigma - F^2\tau) \leq 0$，否则，有 $E(0) = \sigma$，这是不可能的。

下面得出的σ, F和 τ 的具体数值也证实了这一结论，由于

$\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = \infty$可以作出 $E(t)$的略图，图中 T_c 是 $E(t)=0$的根。



如果$T \le T_c$那么运动员全程都用最大冲力F去跑，也能保证$E(t) \ge 0$。可以认为整个赛跑仅有这一阶段，即令$T_1 = T$，则最优速度即为(6)式中的$v(t)$，从而：

$$D = \int_0^T v(t)dt = F\tau^2\left(e^{-\frac{T_c}{\tau}} + \frac{T}{\tau} - 1\right) \qquad (9)$$

T_c为冲刺不得超过的时间，当4个生理参数给定后，冲刺距离为：

$$D_c = F\tau^2\left(e^{-\frac{T_c}{\tau}} + \frac{T}{\tau} - 1\right) \qquad (10)$$

所以，当赛程不超过 D_c 时(短跑)，以最大冲力跑就是最优策略，(6)式表示的 $v(t)$ 就是最优速度，当赛程超过 D_c 时（如中长跑），则 $t > T_c$，但冲刺时间只能小于 T_c，因而需确定一个时刻 t_1，在 $0 < t \le t_1 < T_c$ 这段时间以最大冲力跑，可是 t_1 不好确定，先讨论赛跑的最后阶段。

（2）最后阶段 $t_2 \le t \le T(t_2$ 代定$)$。 这个阶段运动员应把贮存的能量全部用尽，靠最大速度得到惯性冲刺，所以令：

$$E(t) = 0 \qquad t_2 \le t \le T \tag{11}$$

将（2）代入(4）可得:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \sigma - v(\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau}) \\ E(0) = E0, E(t) \ge 0 \end{cases} \tag{12}$$

由⑾式，$\dfrac{dE}{dt} = 0$，所以从上式得到：

$$\begin{cases} v\left(\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{\tau}\right)=\sigma \\ v\big|_{t=t_2}=v(t_2) \end{cases} \qquad (13)$$

其解为：

$$v(t)=\left[\left(v^2(t_2)-\sigma\tau\right)e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

只须求出$v(t_2)$，就知最后阶段的最优速度了。

(3) 中间阶段 $t_1 \le t \le t_2$ 。由(6)和(14) 式及(1)，整个距离：

$$D(v(t)) = \int_0^{t_1} F\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt + \int_{t_2}^{T}\left[\left(v^2(t_2)-\sigma\tau\right)e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}}dt \quad (15)$$

其中 $v(t)$ 还应满足 $E(t_2)=0$，由（12）解出 $E(t)$ 为：

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \frac{v^2(t)}{2} - \frac{1}{\tau}\int_0^{t} v(t)dt \quad (16)$$

令 $t = t_2$，并在 $0 \le t \le t_1$ 时间用(6)式代入上式，得：

$$E(t_2) = E_0 + \sigma t_2 - \frac{v^2(t_2)}{2} - \frac{1}{\tau}\int_0^{t_1} F\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt - \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt = 0$$

(17)

于是归结为在条件(1)下求 $v(t)$，使泛函（15）达到极值，这是变分法中的极值问题，用Lagrange乘子法求解，作：

$$L[v(t)] = D(v(t)) + \frac{\lambda}{2} E(t_2) \qquad (18)$$

为计算方便，将右端与$v(t)$无关的项略去，写成：

$$L[v(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[v(t) - \frac{\lambda}{2\tau} v^2(t) \right] dt + \int_{t_2}^{T} \left[\left(v^2(t_2) - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2 - t)}{\tau}} \right] dt - \frac{\lambda}{4} v^2(t_2) \qquad (19)$$

右端第一个积分依赖于$v(t)$，满足变分法的Euler方程（泛函极值的必要条件），第二，三项仅仅依赖于$v(t_2)$，可用普通微分法求极值方法，则有：

$$\frac{d}{dv}\left[v(t)-\frac{\lambda}{2\tau}v^2(t)\right]=0 \qquad (20)$$

其解为：

$$v(\tau)=\frac{\tau}{\lambda} \qquad (t_1 \le t \le t_2) \qquad (21)$$

以及：

$$\frac{d}{dv(t_2)}\left(\int_{t_2}^{T}\left[\left(v^2(t_2)-\sigma\tau\right)e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}}+\sigma\tau\right]dt-\frac{\lambda}{4}v(t_2)\right)=0$$

(22)

其解为：$2\int_{t_2}^{T}\left[\left(v^2(t_2)-\sigma\tau\right)e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}}dt=\lambda$ (23)

（21）式表明，在中间阶段 $t_1 \le t \le t_2$ ，最优速度应是常数，剩下的问题是如何确定 t_1, t_2 及 λ。

(4) t_1, t_2 及 λ 的确定，因 $v(t)$ 在 $t = t_1$ 处连续，由(6)和（21）式得：

$$\lambda = \frac{1}{F(1-e^{-\eta})} \qquad (24)$$

其中 $\eta = \frac{t_1}{\tau}$，将 $v(t_2) = \frac{\tau}{\lambda}$ 代入(23)式，积分得：

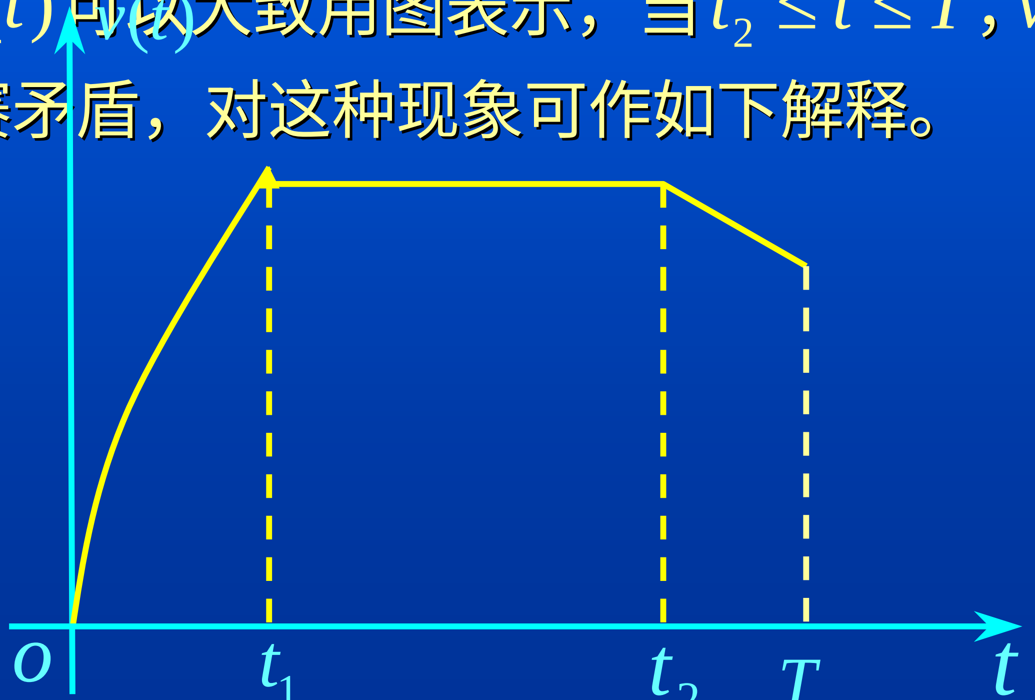
$$\lambda = 2\frac{\left[\left(\frac{\tau^2}{\lambda^2}-\sigma\tau\right)e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}+\sigma\tau\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{\lambda}}{\sigma-\frac{\tau}{\lambda^2}} \qquad (25)$$

再将 $v(t)=\dfrac{\tau}{\lambda}$ 代入(17)积分，又有：

$$E_0+\sigma t_2-\frac{\tau^2}{2\lambda^2}-\frac{\tau}{\lambda^2}(t_2-t_1)-F^2\tau\left(t_1-\frac{3\tau}{2}+2\tau e^{-\frac{t_1}{\tau}}-\frac{\tau}{2}e^{\frac{2t_1}{\tau}}\right)=0 \tag{26}$$

这样，t_1, t_2 和 λ 可由(24)—(26)确定。

最优速度$v(t)$可以大致用图表示，当$t_2 \le t \le T$，$v(t)$下降，这与实际比赛矛盾，对这种现象可作如下解释。



象汽车比赛在最后阶段把燃料用光，靠惯性冲力一样,赛跑的最优策略应该是把人体贮存供赛跑所用全部能量耗尽，这样会出现一个短暂的速度下降的最后阶段，单从赛跑所用的时间看，这是最优的，当然，实际比赛，当与对手势均力敌时，从击败对手取得好名次的目的出发，需要斗智，这不属于本模型所讨论的范畴。

生理参数的确定

为了确定在建立模型过程中假定为已知的4个生理参数F, τ, σ, E_0，Keller先用从50码到220码8个短跑世界纪录，用最小二乘法得到E_0和 τ 的估值。然后又用从400米到1000米14个中长跑世界纪录，去拟合由(6)，(21)，(14)，(24)—(26)和(1)式计算的理论成绩，用最小二乘法得到E_0和 τ 的估计值，其估值为：

$$F = 1.22m/s \qquad \tau = 0.892s$$

$$E_0 = 2423J/kg \qquad \sigma = 41J/kg \cdot s$$

用这些数值按照(8)，(10)计算出$D_c = 291m$，根据前面分析，可把距离不超过291米的8个赛程（50码到200码）列为短跑，即最优速度仅有一个阶段。

模型检验

最后，将22个赛程的当时的世界纪录 T_1 ，用这个模型计算的理论值 T_2，相对误差，模型中最初阶段的时间 t_1 和模型中最后阶段的时间 T_2-t_2 列于表中，从表中可看出，相对误差很小。（见p83）

评注：

该模型把动力学和生理学结合起来，用最优控制的方法处理体育运动问题，为我们作出了示范。当然，还有一些需改进的地方，如所有赛程用了同一组生理参数，而有的生理参数对不同的赛程应不同，还应考虑运动员身体上下方向运动及运动所产生的废料的积集和排放等因素。

进一步的思考

模型还有哪些需改进的地方？比如所有赛程用了同一组生理参数，而有的生理参数对不同的赛程可能会不同，还应考虑运动员身体上下方向运动及运动所产生的废料的积集和排放等因素。在考虑新因素后，如何建模？