

MATHEMATICA MODEL

血管三维重建

制作：龚劬



问题

断面可用于了解生物组织、器官等的形态。例如，将样本染色后切成厚约 1mm 的切片，在显微镜下观察该横断面的组织形态结构。如果用切片机连续不断地将样本切成数十、成百的平行切片，可依次逐片观察。根据拍照并采样得到的平行切片数字图象，运用计算机可重建组织、器官等准确的三维形态。

假设某些血管可视为一类特殊的管道，该管道的表面是由球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动包络而成。例如圆柱就是这样一种管道，其中轴线为直线，由半径固定的球滚动包络形成。

现有某管道的相继100张平行切片图象，记录了管道与切片的交。



问题重述

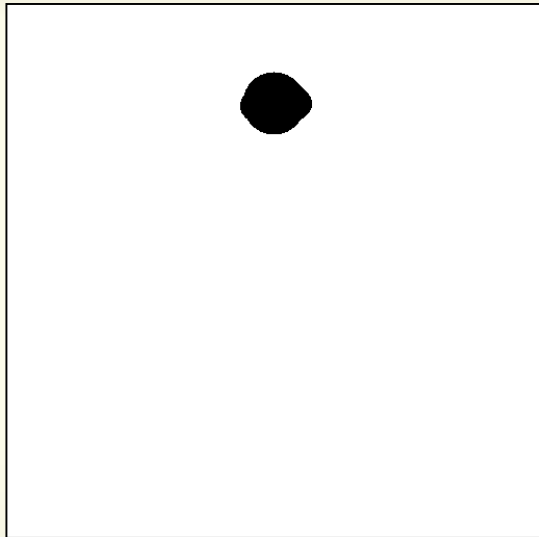
为简化，假设：管道中轴线与每张切片有且只有一个交点；球半径固定；切片间距以及图象像素的尺寸均为1。

取坐标系的Z轴垂直于切片，第1张切片为平面 $Z=0$ ，第100张切片为平面 $Z=99$ 。 $Z=z$ 切片图象中像素的坐标依它们在文件中出现的前后次序为

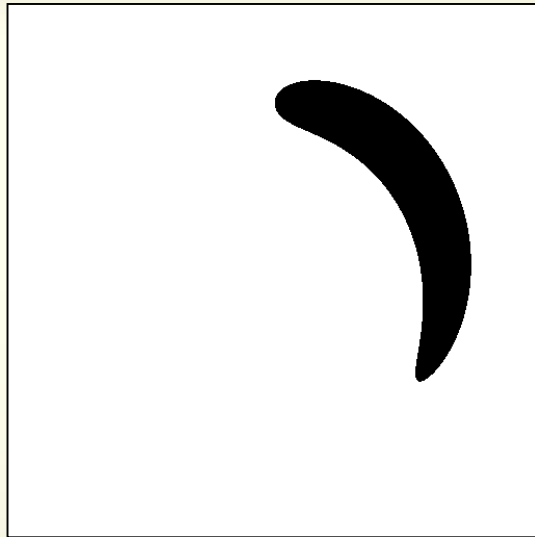
$(-256, -256, z)$, $(-256, -255, z)$, ... $(-256, 255, z)$,
 $(-255, -256, z)$, $(-255, -255, z)$, ... $(-255, 255, z)$
 $(255, -256, z)$, $(255, -255, z)$, ... $(255, 255, z)$ 。

试计算管道的中轴线与半径，给出具体的算法，并绘制中轴线在XY、YZ、ZX平面的投影图。

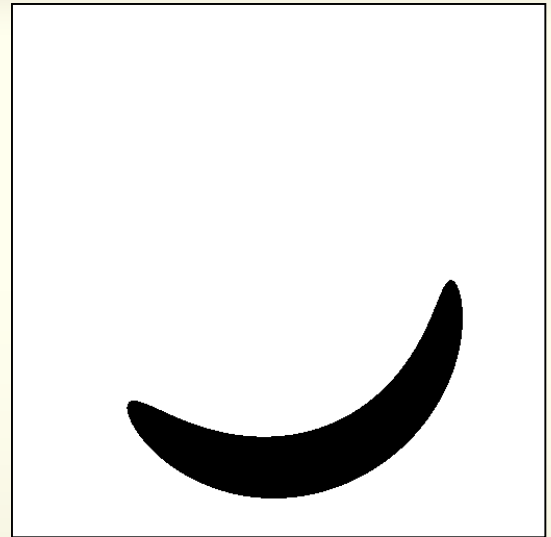




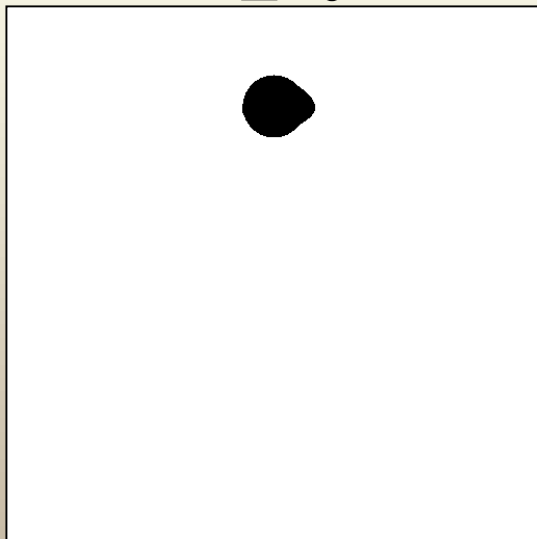
Z=0



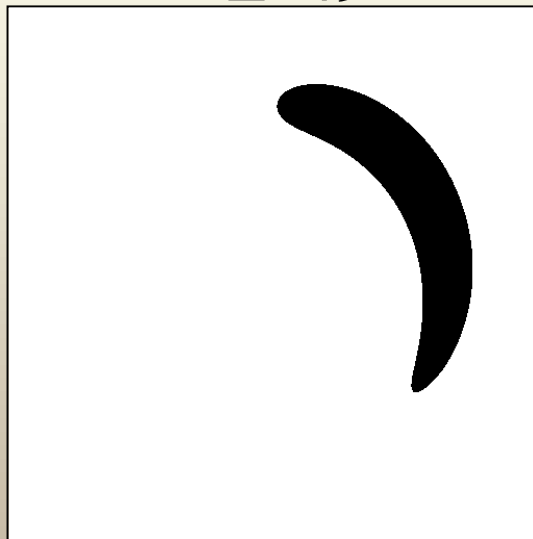
Z=49



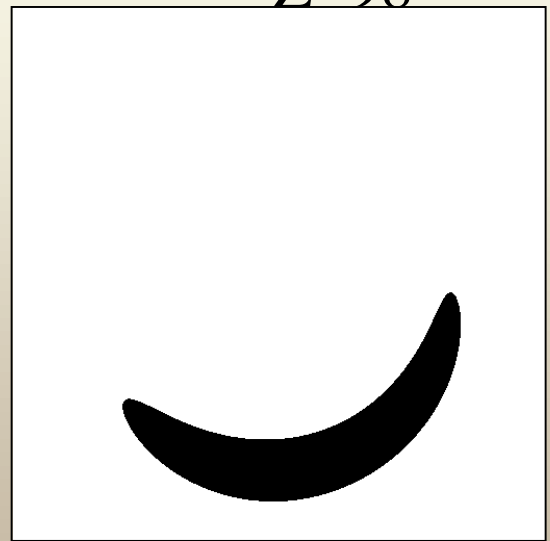
Z=98



Z=1



Z=50



Z=99



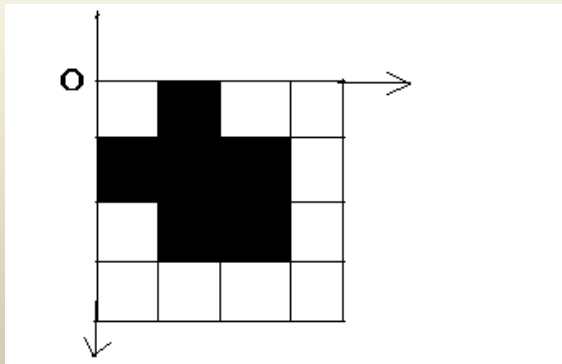
假设

- 1) 血管的表面是由半径固定、球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动而形成的包络面。
- 2) 中轴线上任两点处的法截面圆不相交。
- 3) 管道中轴线与每张切片平面有且只有一个交点。



图象的矩阵表示

二值图象的象素矩阵为0-1矩阵，矩阵横纵坐标对应原图象的直角坐标系位置，0和1分别代表该位置上的黑或白象素。



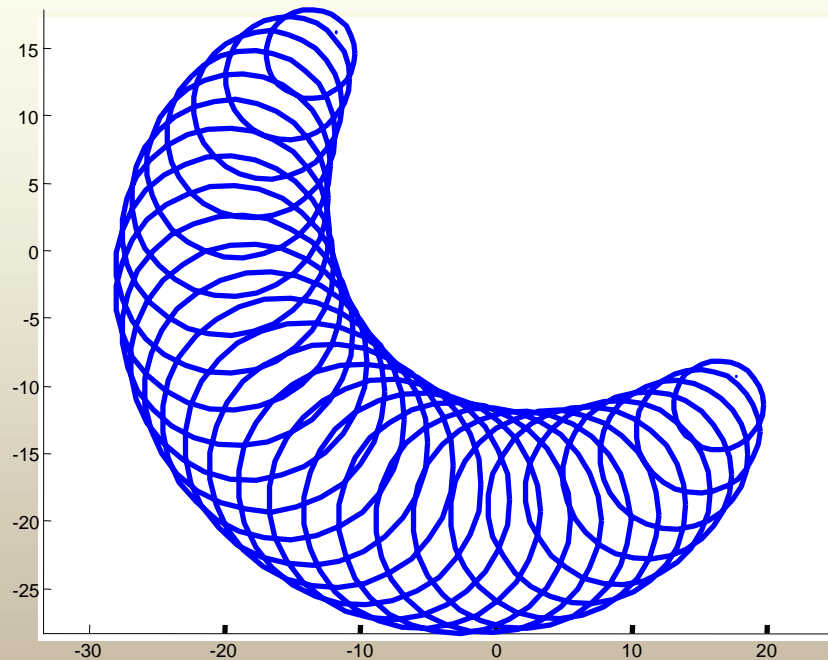
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

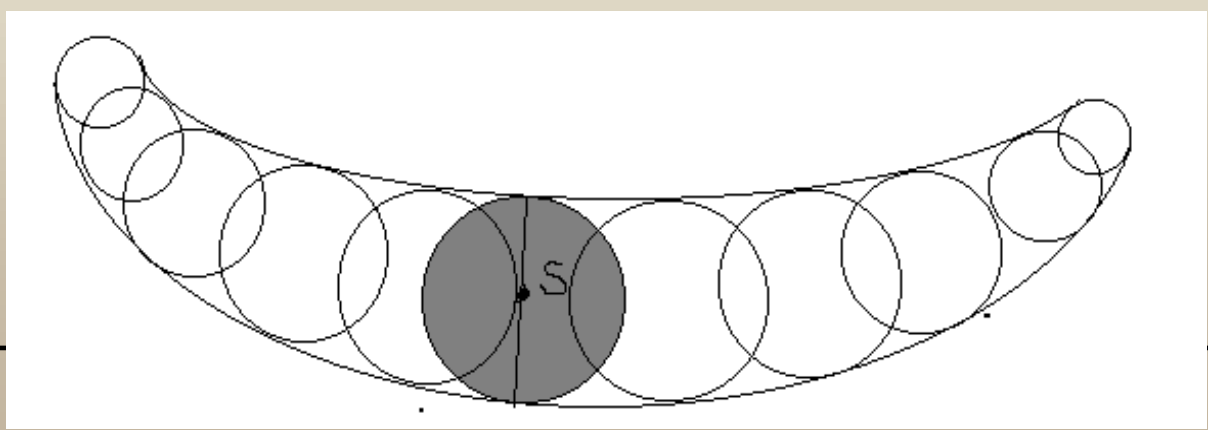
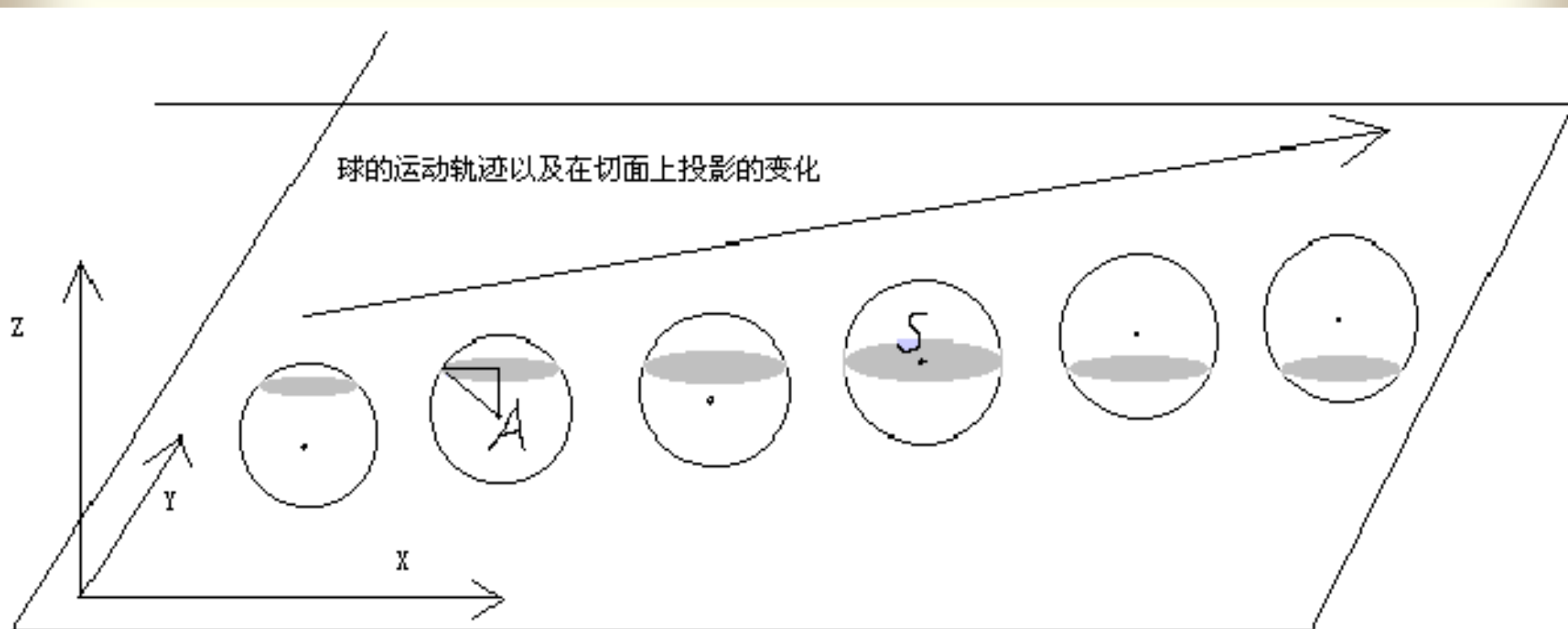


问题分析

将管道看成是小球运动包络形成的，则管道的切片便是滚动的小球在平面 z 上的截圆形成的包络。

小球沿螺旋线滚动时，在某平面上的截圆形成包络。





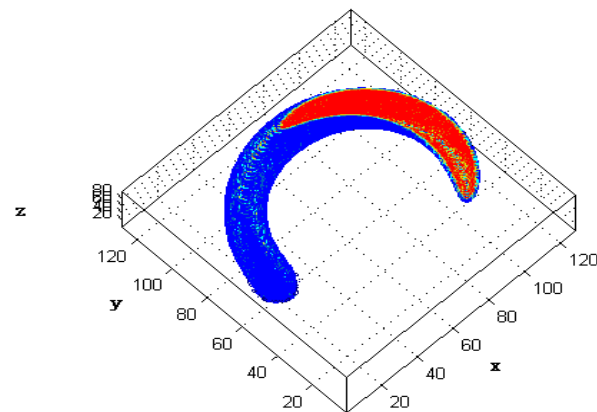
问题分析

解决问题的关键在于发现

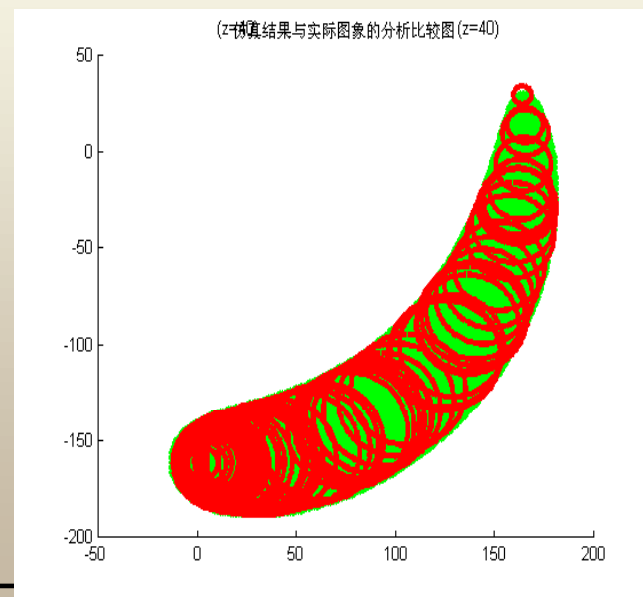
定理：在一条粗细均匀血管的任何横截面的图象内，其包含的最大内切圆的圆心位于中轴线上，该圆的半径等于滚动球的半径。

基于：

- 1) 球的任意截面都是圆
- 2) 经过球心的球截面当中半径最大的圆



三维立体结构模拟图



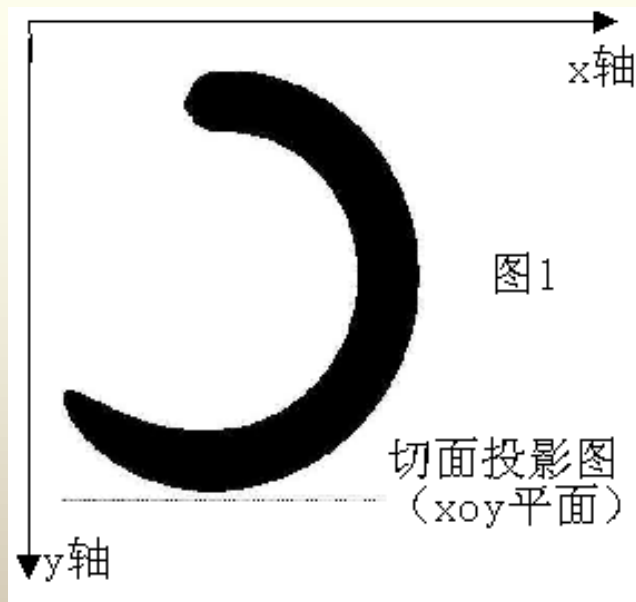
建模方法思想

求滚动球半径 r 的方法

- 1) 平均法
- 2) 抽样法
- 3) 极大似然法
- 4) 叠加法

求出的半径在

28.5~30.5之间，为什么？



建模方法思想

需考虑的细节：

1) 如何读入一个数字图象，即如何由bmp图象文件（或其它格式的图象文件）得到象素矩阵？

MATLAB函数imread ()： `m=imread('0.bmp')`

或把图象序列转换为三维数组

```
for b=0:99
```

```
    m(:, :, b+1)=imread([int2str(b), '.bmp']);
```

```
end
```



建模方法思想

需考虑的细节：

2) 何谓边界点？

四邻域的概念 找边界点坐标的算法

也可用MATLAB函数:edge()

如：`m=imread('0.bmp'); bw=edge(m, 'sobel')`

3) 最大内切圆的圆心和半径须取小数和整数有区别吗？

4) 取整方法：四舍五入 (round)，向上取整(ceil)，向下取整(floor)



5) 如何由切片图叠合作出血管的立体图？

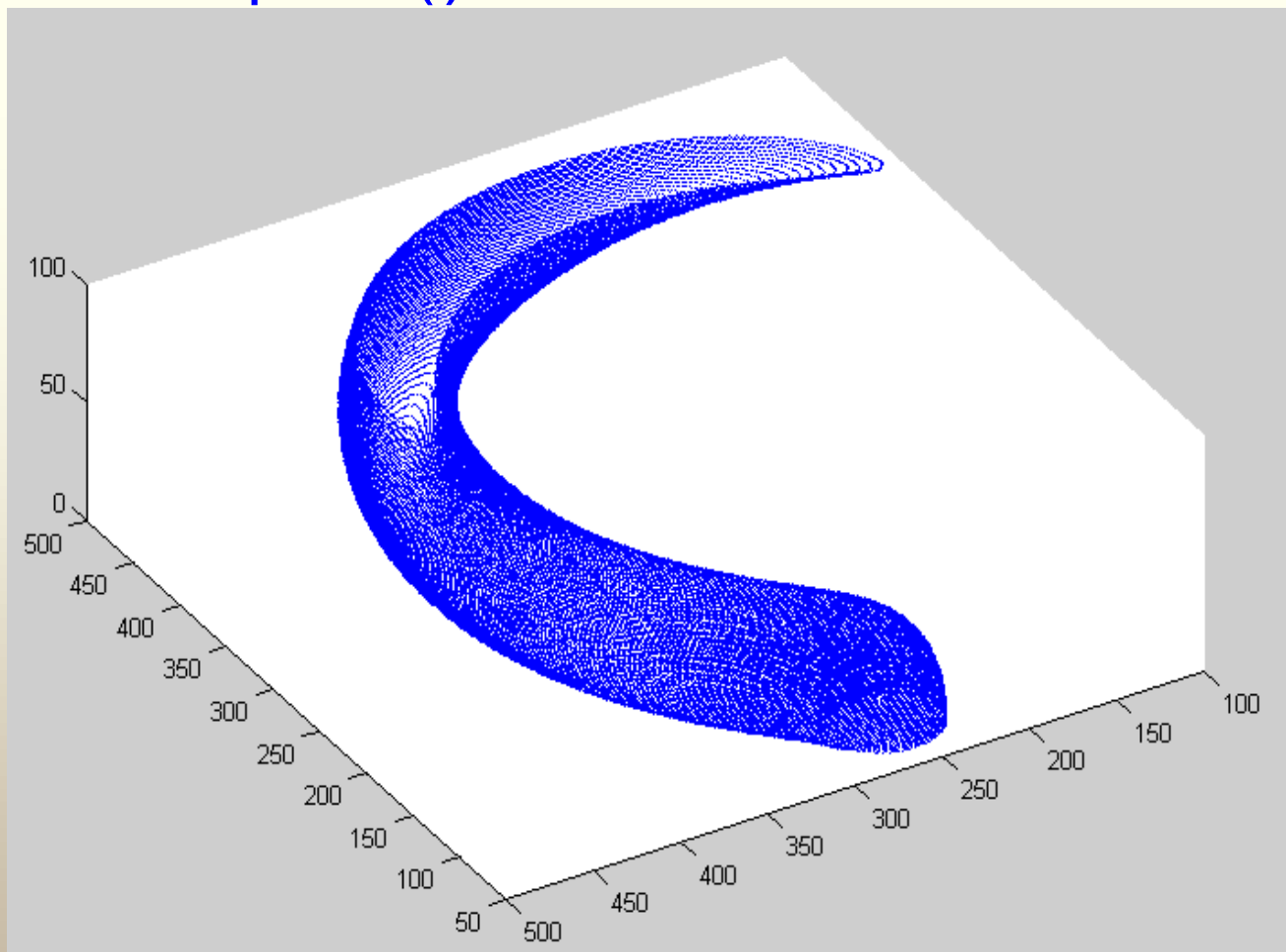
方法1：利用plot3()

```
for b=0:99
    m1=imread([int2str(b),'.bmp']);
    m(:, :, b+1)=edge(m1, 'sobel');
end
for k=0:99
    for i=1:512
        for j=1:512
            if (m(i, j, k+1)==1)
                plot3(i, j, k+1, 'b-.');hold on
            end
        end
    end
end
rotate3d, hold off
```



5) 如何由切片图叠合作出血管的立体图？

方法1：利用plot3()



方法2：利用patch()

```
for b=0:99
```

```
m(:,:,b+1)=[imread([int2str(b),'.bmp'],'bmp')];
```

```
end
```

```
m1=m(1:4:512,1:4:512,:);
```

```
for i=1:size(m1,1)
```

```
    for j=1:size(m1,2)
```

```
        for k=1:size(m1,3)
```

```
            if m1(i,j,k)==0
```

```
                m1(i, j, k)=88;
```

```
            else
```

```
                m1(i,j,k)=0;
```

```
        end, end, end, end
```

```
ms=smooth3(m1);
```

```
hiso=patch(isosurface(ms,5),'FaceColor',[1,.75,.65],'EdgeColor','none');
```

```
hcap=patch(isocaps(m1,5),'FaceColor','interp','EdgeColor','none');
```

```
colormap('default')
```

```
view(45,30), axis tight
```

```
grid
```

```
daspect([1,1,.4])
```

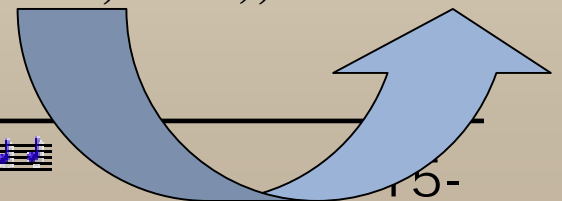
```
lightangle(45,30); lighting phong
```

```
isonormals(ms, hiso)
```

```
set(hcap,'AmbientStrength',.6)
```

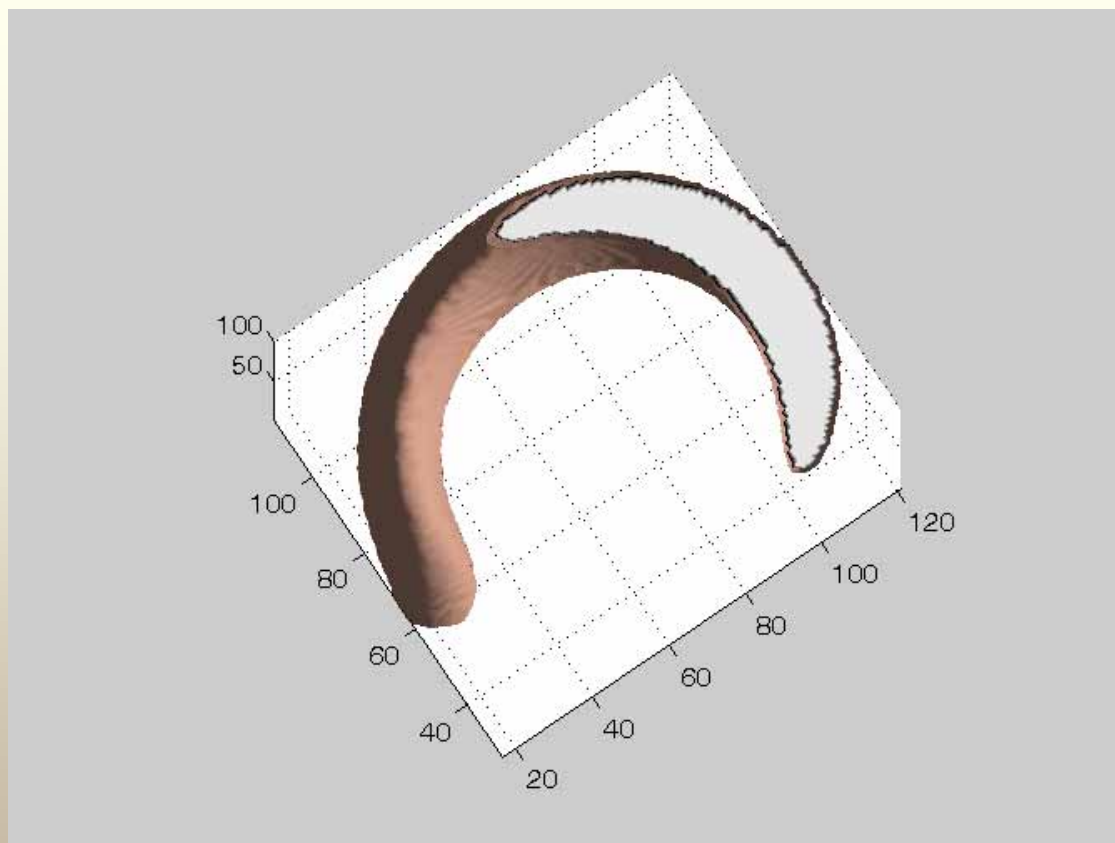
```
set(hiso,'SpecularColorReflectance',0,'SpecularExponent',50)
```

```
rotate3d
```



5) 如何由切片图叠合作出血管的立体图？

方法2：利用patch()



建模方法思想

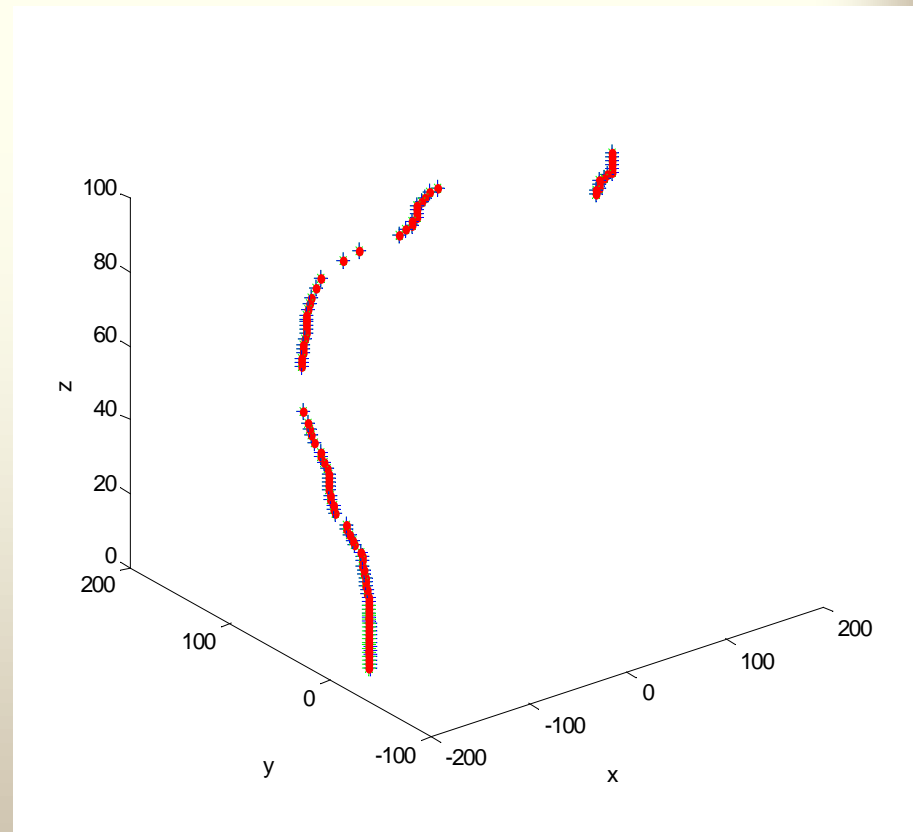
中轴线的建模：求中轴线 Γ 与各横断面的交点和曲线拟合、逼近。参赛者使用的方法主要有：

- 1) 枚举法
- 2) 平行切线法
- 3) 外推法
- 4) 滚球法
- 5) 投影法
- 6) 变换法
- 7) 细化法



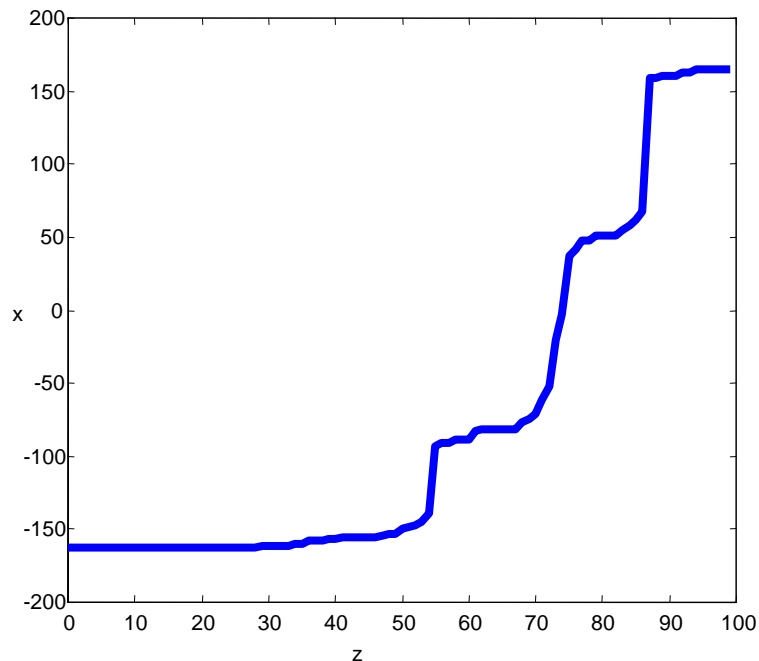
具体实现时出现的问题

方法一：以黑色点为圆心，以 r_0 为半径画圆，判断此圆周上的像素点是否为黑色。若全为黑色，则增大半径再判断，直到圆周上有白色像素点，记录该圆的圆心坐标和半径，然后，取下一个黑色像素点重复以上步骤，直至黑色区域中所有像素点都搜索完为止；所有记录点中对应于最大半径的圆心坐标，就是该切片的最大内切圆圆心坐标，此半径即是血管的半径

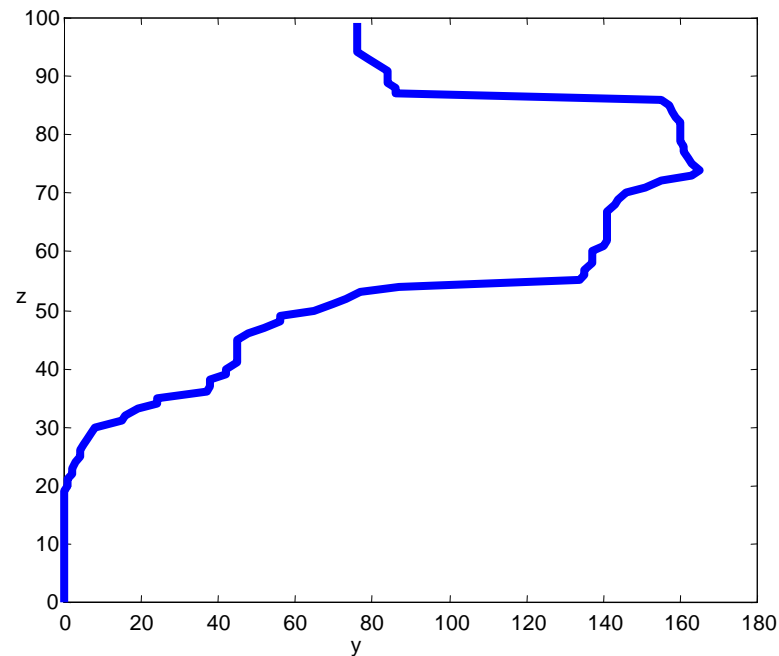


具体实现时出现的问题

方法一得出的中轴线投影：



中轴线在ZX平面投影图



中轴线在YZ平面投影图

什么原因造成内切圆圆心的误差如此之大？



建模方法思想

模型的检验

不检验只能说完成问题的一半。由于所给图象只是离散数据，以像素为单位。无论以何种方式建模，都是近似计算，效果如何，检验很必要。还可通过检验，发现模型的误差，修正模型，提高模型的正确性。阅卷中发现的检验方法主要有：

- 1) 逐片比较
- 2) 法平面法
- 3) 滚动法

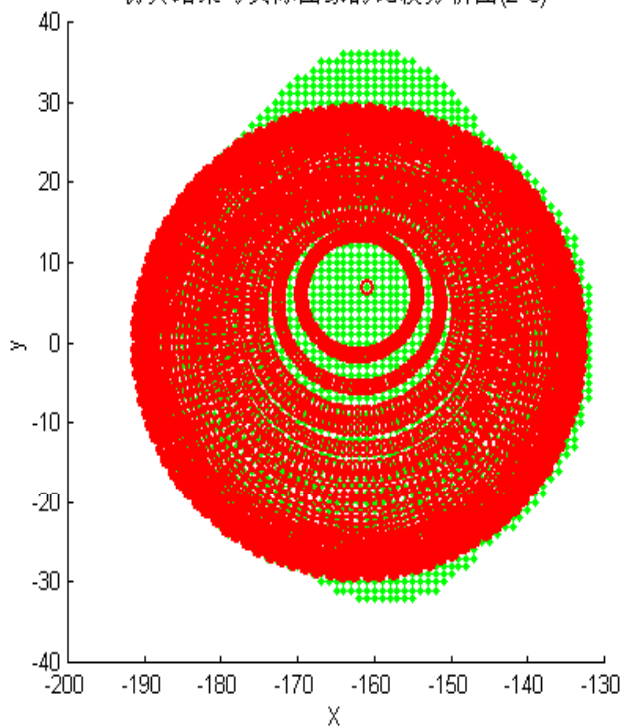


建模方法思想

模型检验时也发现内切圆圆心误差较大，特别是后面的切片。

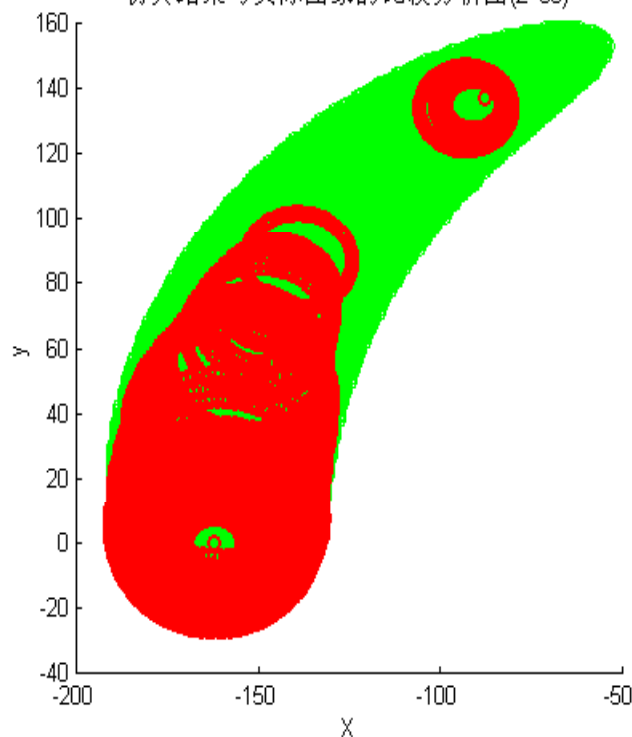
Z=0

仿真结果与实际图象的比较分析图(Z=0)



Z=30

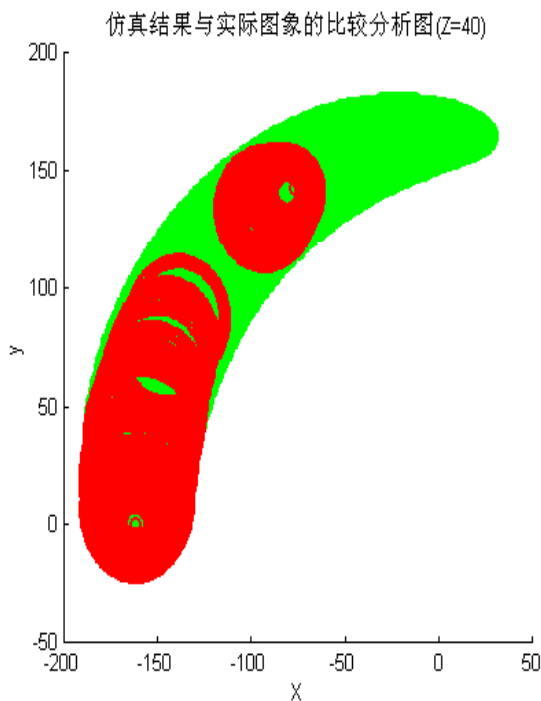
仿真结果与实际图象的比较分析图(Z=30)



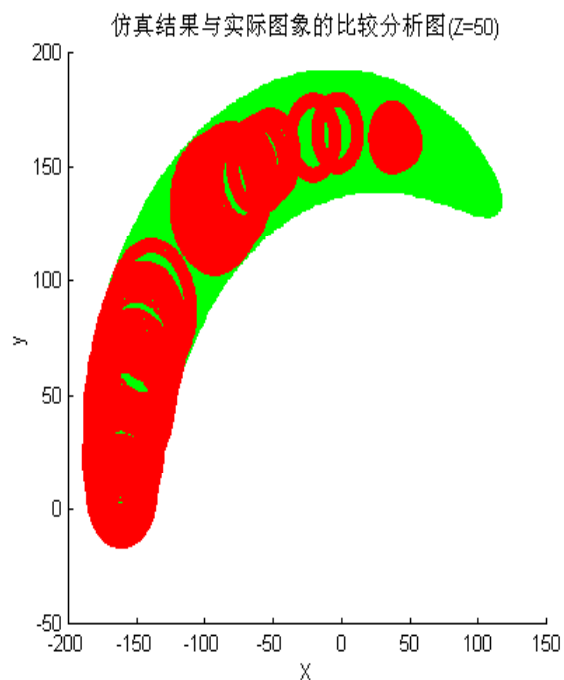
建模方法思想

模型检验时也发现内切圆圆心误差较大，特别是后面的切片。

Z=40



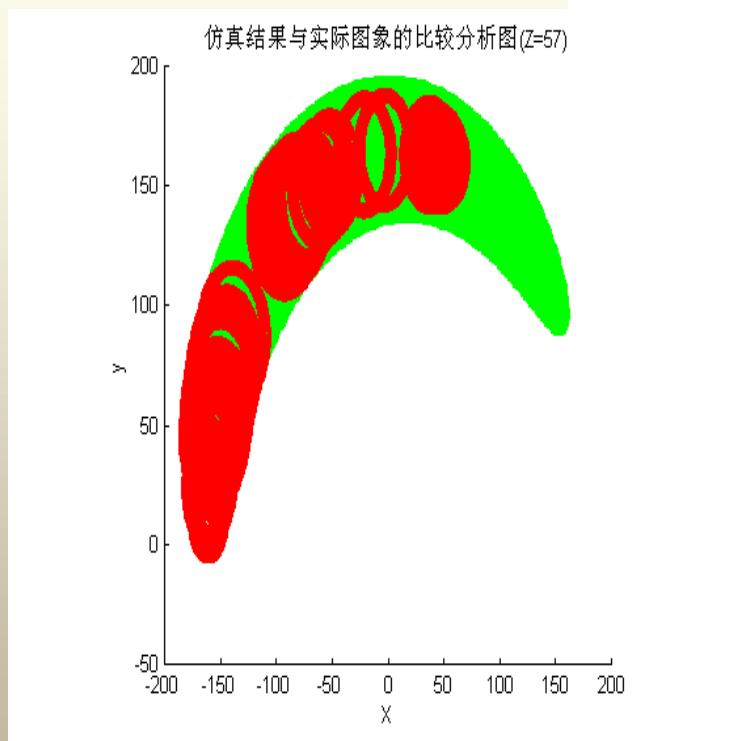
Z=50



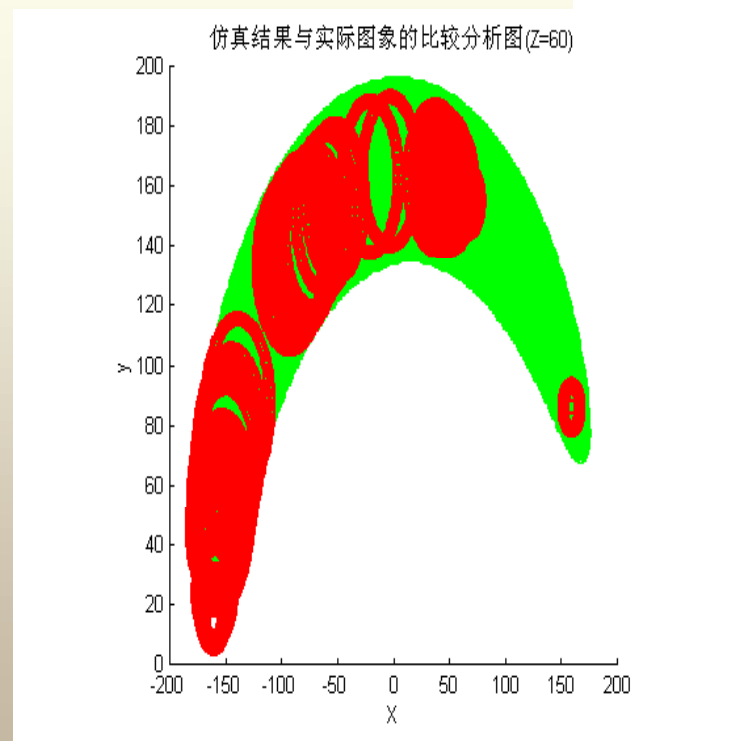
建模方法思想

模型检验时也发现内切圆圆心误差较大，特别是后面的切片。

$Z=57$



$Z=60$



误差大的原因和改进途径

误差大的原因：

1) 图象误差

实际图象边界上的点是连续的，在转换成bmp图象时，象素表示的图象边界是离散的，成锯齿状，与实际图象有误差（舍入误差）。

2) 同一张切片上的最大内切圆不唯一

解决办法：

1) 方法一：取平均

求出同一张切片上的所有最大内切圆的圆心，然后求平均值。

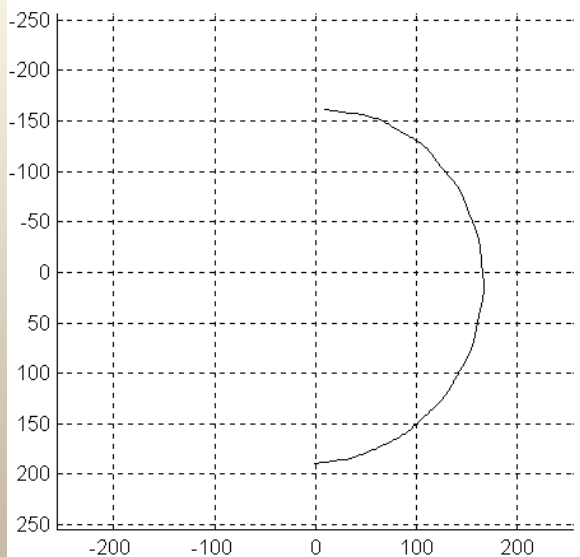


误差大的原因和改进途径

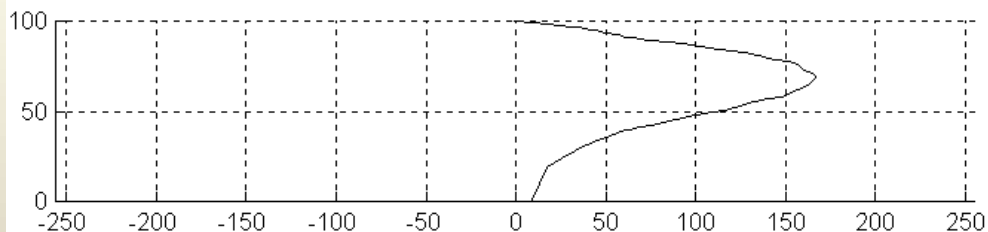
1) 方法一：取平均

求出同一张切片上的所有最大内切圆的圆心，然后求平均值。

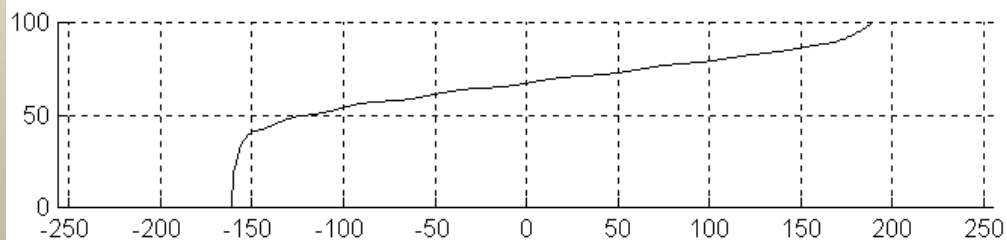
XY平面上的投影



YZ平面上的投影

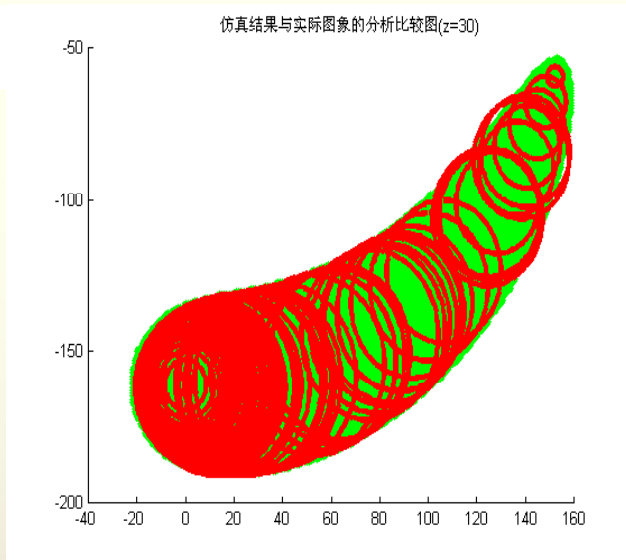


ZX平面上的投影

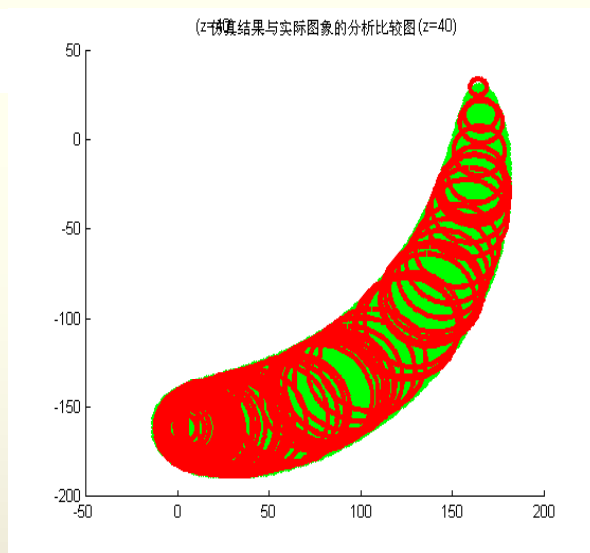


检验

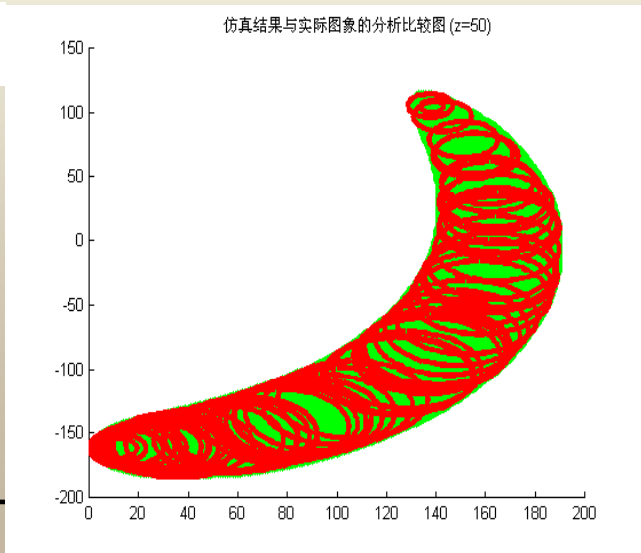
Z=30



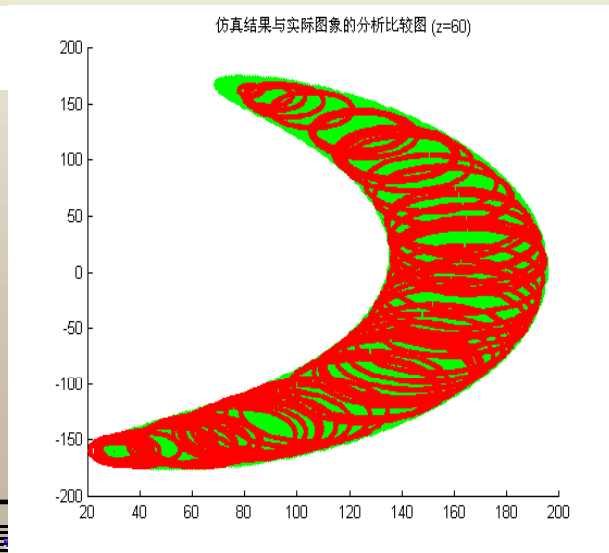
Z=40



Z=50



Z=60



误差大的原因和改进途径

误差分析

设原图象是由 $N \times N$ 个像素点组成，令其为 $f(x, y)$ ，重建图象为 $g(x, y)$ ，它同样由 $N \times N$ 个像素点组成，其中 $x, y=0, 1, \dots, N-1$ 。重建图象的均方误差可用下式表示：

$$\begin{aligned} \bar{e}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^2(x, y) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} [g(x, y) - f(x, y)]^2 \end{aligned}$$



误差大的原因和改进途径

误差分析

切片Z值	32	43	57	65
均方误差	0.0019	0.0024	0.0048	0.0040

由计算出的均方误差情况可以看出，均方误差的平均值低于0.5%。

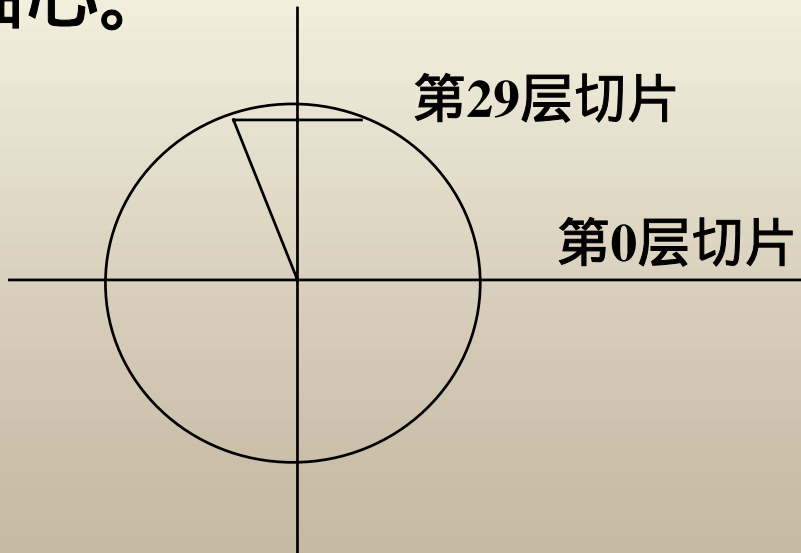
还可以用信噪比，相异象素点所占的比例等其它性能指标来度量重构图象的质量。



误差大的原因和改进途径

2) 方法二：筛选+尖点特性

在第 z 层，求出其所有最大内切圆的圆心，若是轴心坐标，则以它为中心的球体被上下 i ($i=1\sim 29$)张切片所截的小圆不在第 $z\pm i$ 张切片中，否则，该圆心就不是轴心。



误差大的原因和改进途径

2) 方法二：筛选+尖端特性

0.bmp ~70.bmp用上述方法处理效果较好，但71.bmp ~99.bmp经筛选后还有不少候选点，可应用尖端特性进行二次筛选。

如99层，由于70层切片左下角不可能是第98或42层球体在70层截圆的包络，而是更小截圆的包络，该小圆只能来自99或41层，经计算41层不可能，故此小圆定在第99层的球体中。

返回



The End

