随机变量的数学期望与方差定义

教学设计与制作：李曼曼

引例

考察一射手的水平，既要看他的平均环数是否高，还要看他弹着点的范围是否小.

1. 数学期望

- 随机变量函数$g(X)$的数学期望定义

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)P\{X=x_i\}, & P\{X=x_i\}\text{为}X\text{的分布律}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx, & f(x)\text{为}X\text{的密度函数}\end{cases}$$

- 当$g(X)=X$时，数学期望EX为

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty} x_iP\{X=x_i\}, & P\{X=x_i\}\text{为}X\text{的分布律}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, & f(x)\text{为}X\text{的密度函数}\end{cases}$$

备注

（1）离散型随机变量，级数和绝对收敛.

（2）连续性随机变量，积分和绝对收敛.

例1. 设某班40名学生的概率统计成绩及得分人数如下表所示:

分数	40	60	70	80	90	100
人数	1	6	9	15	7	2

- 则学生的平均成绩是总分÷总人数(分)。即

- $$\frac{1\times 40+6\times 60+9\times 70+15\times 80+7\times 90+2\times 100}{1+6+9+15+7+2}=76.5(\text{分}) \qquad (3)$$

例1续. 概率统计成绩分布律为

分数	40	60	70	80	90	100
概率	1/40	6/40	9/40	15/40	7/40	2/40

(4)

全班概率统计成绩数学期望为

$$EX=\frac{1}{40}\cdot 40+\frac{6}{40}\cdot 60+\frac{9}{40}\cdot 70+\frac{15}{40}\cdot 80+\frac{7}{40}\cdot 90+\frac{2}{40}\cdot 100=76.5(\text{分})$$

2.方差

❖ 定义 设X为一随机变量，若 $E(X-EX)^2$ 存在，则称这个值为X的方差，记为DX.

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty}(x_i-EX)^2P\{X=x_i\}, & P\{X=x_i\}\text{为}X\text{的分布律}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)dx, & f(x)\text{为}X\text{的密度函数}\end{cases}\qquad(5)$$

注记: $D(X)=E(X-EX)^2=E(X^2)-(EX)^2$ （6）

注 意 点

(1) 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度.
方差越大，则随机变量的取值越分散.

(2) 称$\sqrt{DX}$为X的标准差或均方差.

标准差的量纲与随机变量的量纲相同.

例2. 设 X 服从$[a,b]$上的均匀分布，求 DX。

解：因为 $EX=\dfrac{a+b}{2}$ $\qquad EX^2=\int_a^b \dfrac{x^2}{b-a}dx=\dfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$

由方差定义有

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)-\frac{1}{4}(a+b)^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

3. 常见随机变量的数学期望和方差

序号	分布类型	期望EX	方差DX
1	$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
2	$P(\lambda)$	λ	λ
3	$Ge(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
4	$U[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
5	$\Gamma(1,\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
6	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

小结

（1）数学期望（期望，均值，加权平均）

（2）方差

（3）常见随机变量的数学期望和方差