飞机飞行管理问题

重庆大学数理学院
段正敏

问题

- 飞机在10000m高空的边长为160km的正方形区域做水平飞行，问如何设计才不碰撞？

假设：(1)不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于8km

（2）飞行方向角调整的幅度不应超过30度

（3）所有飞机飞行速度为800km/h

（4）新飞机进入该区域边缘时，与区域内飞机的距离应在60km以上。

（5）最多考虑6架飞机

（6）不必考虑飞机离开此区域后的状况

返回

相关知识

1。线性规划

2。非线性规划（有约束）

（**1**）可行方向法

（**2**）用线性规划逐步逼近非线性规划法、

（**3**）制约函数法

A 外点法 **B** 内点法

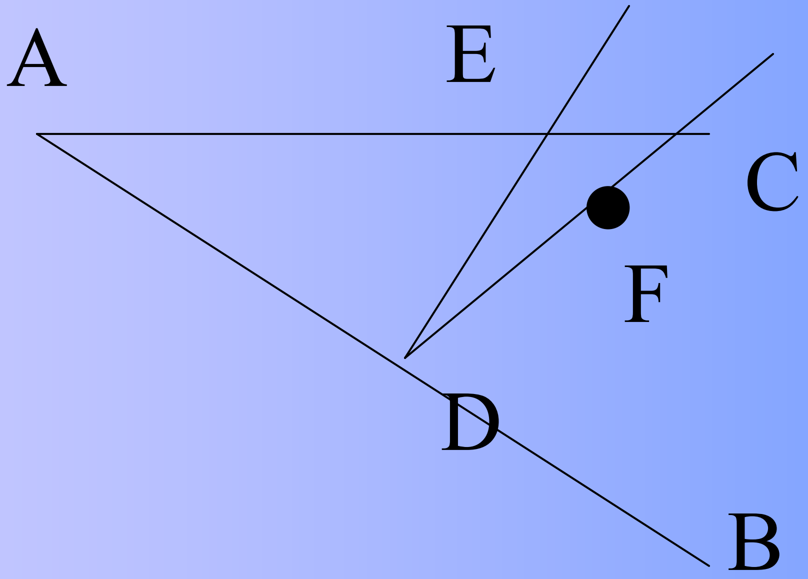
3。非线性规划（无约束）

最速下降法

4。**MONTE-CARLO**法

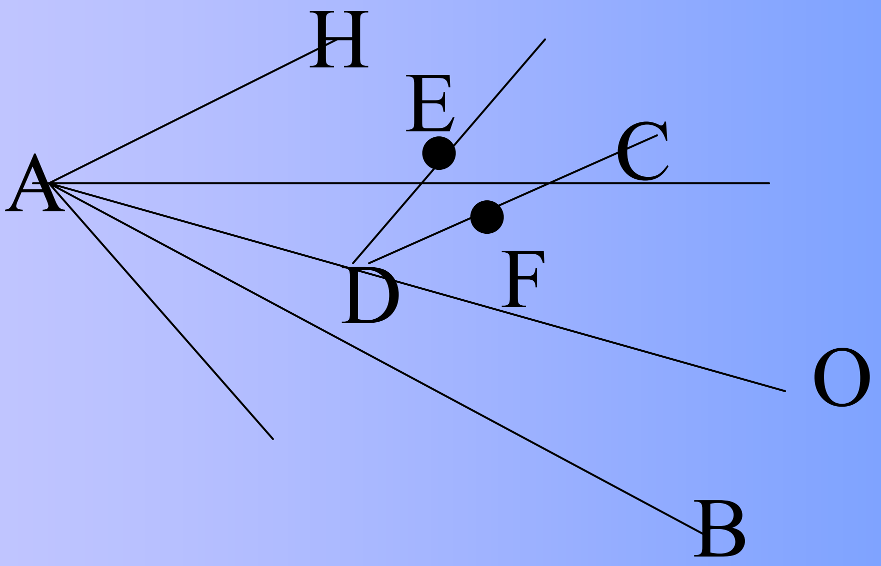
模型分析

●如果发生碰撞，尽早调整一定优于晚调整



模型分析

- 如果发生碰撞，多次调整不如在第一次调整时调整到位好



关于目标函数的讨论

第一种目标函数

$$\sum_{i=1}^{6} \operatorname{sign} |\Delta \theta_i| = \min$$

且 $$\sum_{j \in J} |\Delta \theta_i| = \min$$

第二种目标函数

$$\sum_{j \in J} |\Delta \theta_i| = \min$$

第三种目标函数

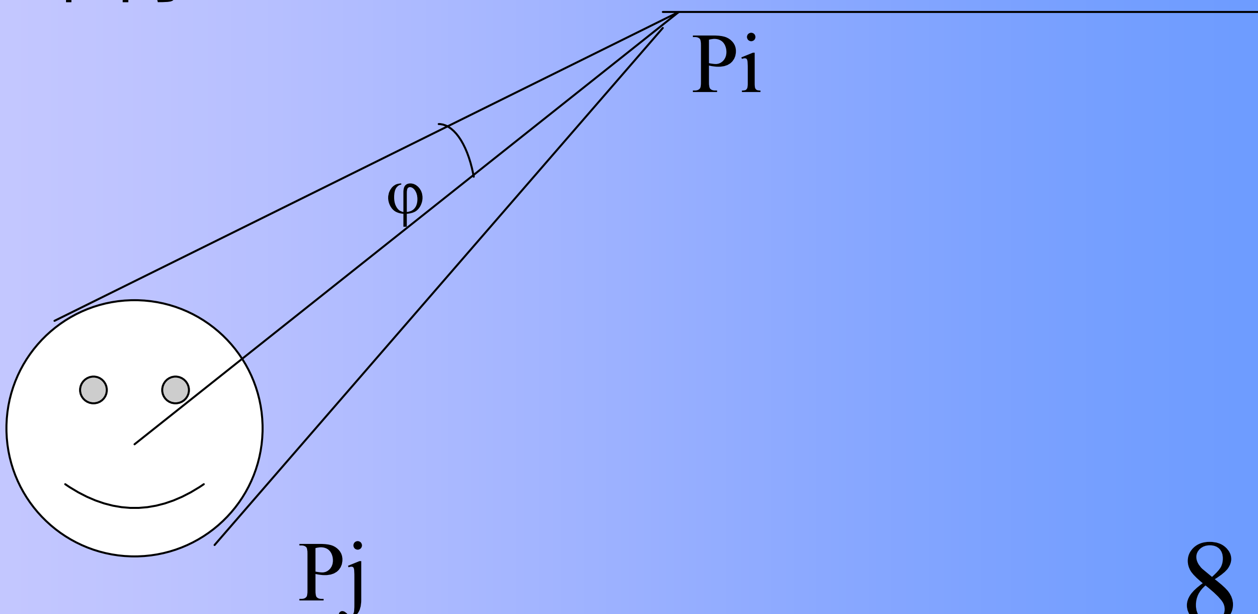
$$\max_{1 \le i \le 6} |\Delta \theta_i| = \min$$

思考

第四种目标函数

$$\sum_{i=1}^{6} \Delta \theta_i^2 = \min$$

非线性规划化为线性规划图示

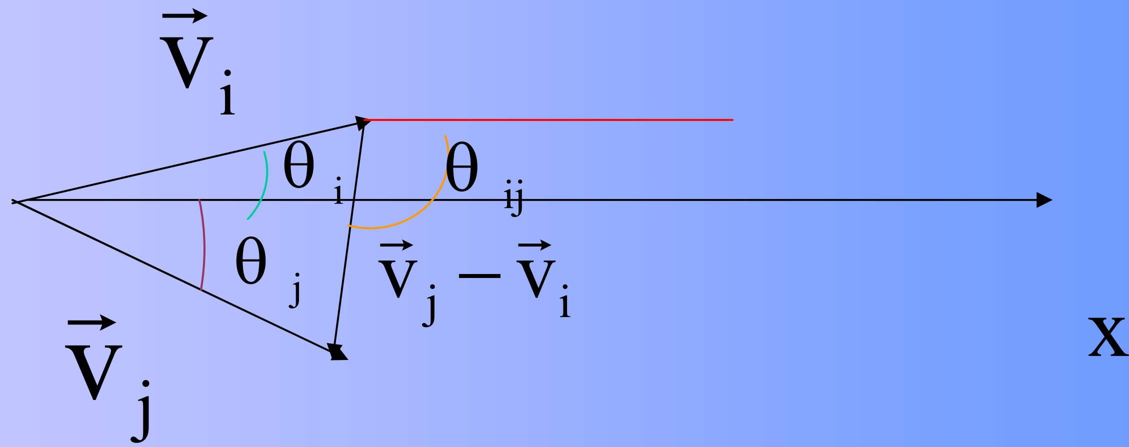


$$\varphi = \arcsin\frac{8}{d_{ij}}$$

约束条件思考

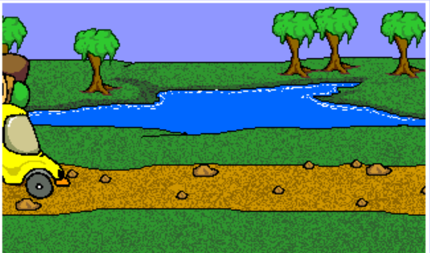
非线性规划化为线性规划

图示



易得到：

$$\frac{\theta_i + \theta_j}{2} + \frac{\pi}{2} (\theta_i > \theta_j)$$



同理可得另一式

思考

非线性规划化为线性规划

确定 θ_{ij}

$$\theta_{ij} \in [\phi_{ij} - \arcsin\frac{8}{d_{ij}}, \phi_{ij} + \arcsin\frac{8}{d_{ij}}]$$

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\theta_i + \theta_j}{2} + \dfrac{\pi}{2} (\theta_i > \theta_j) \\ \dfrac{\theta_i + \theta_j}{2} - \dfrac{\pi}{2} (\theta_i < \theta_j) \\ \text{无方向（} \theta_i = \theta_j) \end{cases}$$

思考

非线性规划已化为线性规划

$$\min \sum_{i=1}^{6} \left|\Delta \theta_i\right|$$

$$s.t \left|\Delta \theta_i\right| \le \frac{\pi}{3}, i = 1,2,\ldots, 6$$

$$\frac{\theta_i^0 + \theta_j^0 + \Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2} > \phi_{ij} + \arcsin \frac{8}{d_{ij}}$$

$$- \operatorname{sign}(\theta_i - \theta_j)\frac{\pi}{2}$$

$$i = 1,2,\ldots, n, j = i+1,\ldots, 6$$

改进模型

- *需进一步考虑正方形边界问题*

- *我们用空间理论加上时间因素考虑此问题*

如何搜索得到更小的角度边界?

(练习)

结论

仍可化为线性规划，但区间边界可能改变，此处考虑用一维搜索得其加了边界后的区间

（P61）

另类解法

1、逐步逼近搜索方法

（北京大学）

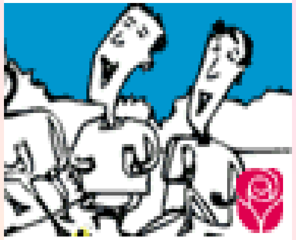
考虑样本空间$\Omega=[-30^0, 30^0]\times[-30^0, 30^0]\times\cdots\times[-30^0, 30^0]$，

要求方向解的误差不超过

0.01，于是我们仅要找出Ω中坐标均为 0.01

的整数倍的点，令

$$\Omega'=\{\Delta\alpha\in\Omega|100\Delta\alpha_I\text{ 为整数}, I=0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

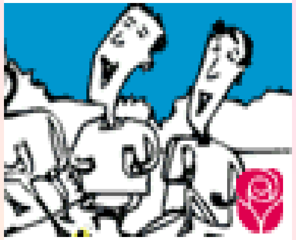


另类解法

$$F(\Delta\alpha)=\begin{cases} +\infty & \text{存在}i\text{，}j\text{，DIST（}A_i\text{，}A_j\text{）}\le 8 \\ f(\Delta\alpha) & \text{其它} \end{cases}$$

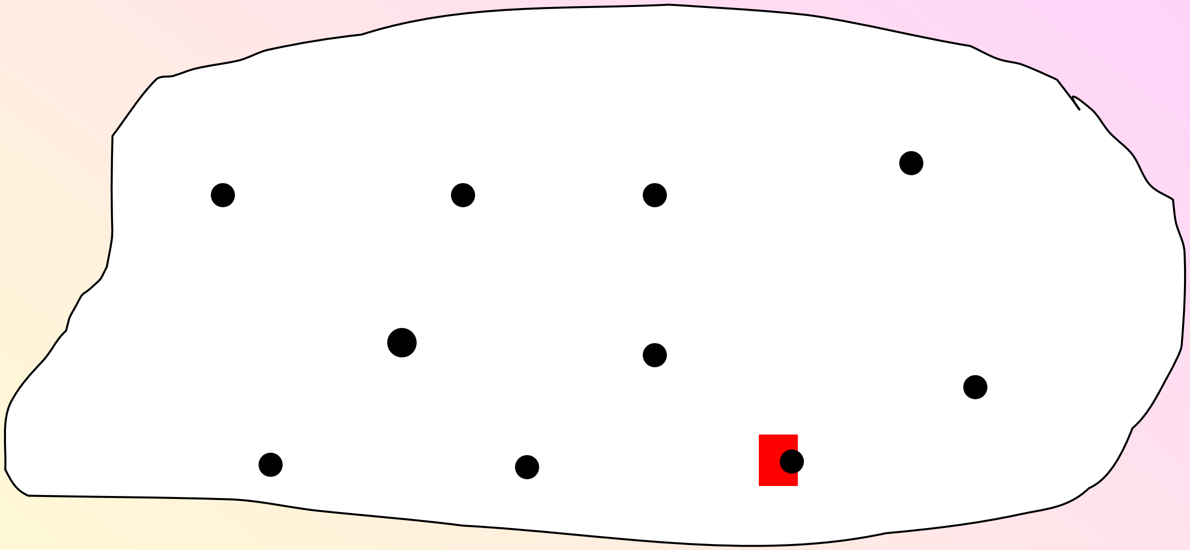
$f(\Delta\alpha)$ 为目标函数方向角改变量的绝对值和

此法类似于MONTE-CARLO法

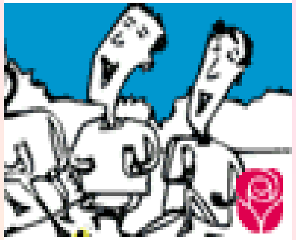


另类解法

方法1

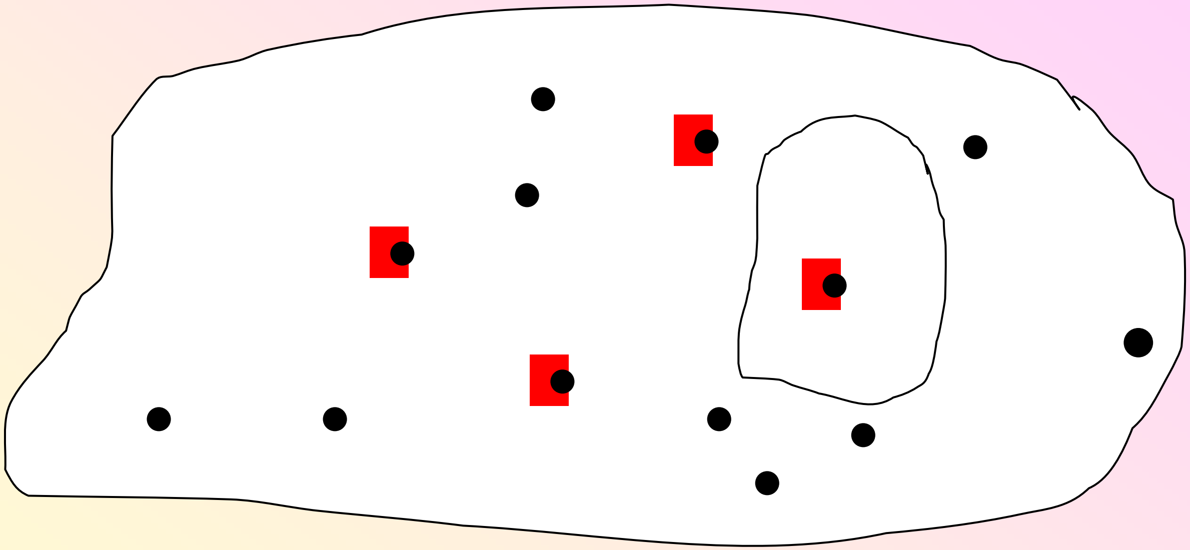


在Ω'内以较大跨度均匀地取N个点，通过遍历计算找到其中使 $F(\Delta\alpha)$ 取最小值的点，然后以该点为中心，找一个较小区域，在其中再取N个点，在N个点中在找使 $F(\Delta\alpha)$ 取最小值的点，如此迭代下去。

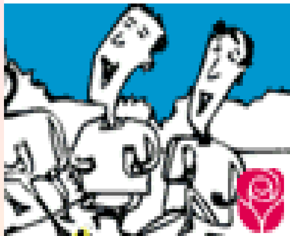


另类解法

方法2



在Ω'内以较大跨度均匀地取N个点，通过遍历计算找到其中使$F(\Delta\alpha)$取最小值的M个点，然后以这M个点为中心作M个小区域，在每一个小区域中均匀地取N个点，计算出这MN个点中使$F(\Delta\alpha)$取最小值的点，如此迭代下去。

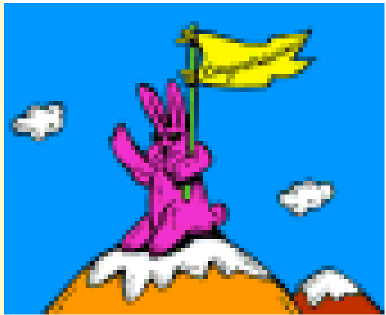


另类解法

2、能量梯度求解法

（清华大学）

设想用能量来表达飞机的位置，当达到最佳位置时能量最小。每架飞机的方向角在其调整方向上的能量梯度表达了该飞机的调整趋势。通过比较这些趋势并在趋势上逐步搜索，其调整过程将向一个较优的结果运动。



另类解法

定义能量函数

$$E = \sum_{i} \sum_{j>i} E_{ij}$$

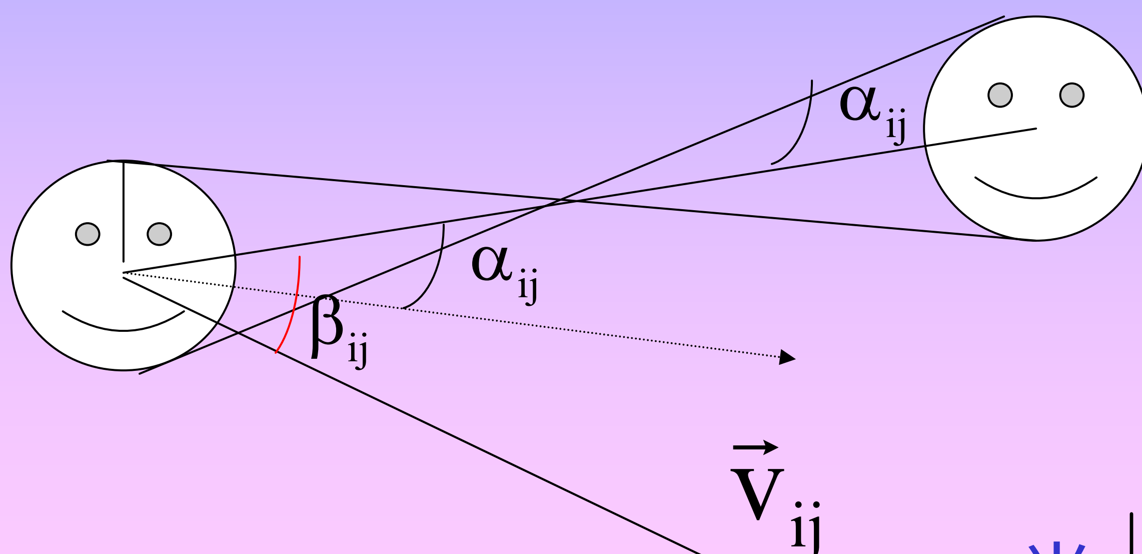
$$E_{ij} = 0 \qquad d_{min,\ ij} \geq 8$$

$$E_{ij} = 8 - d_{min,\ ij}, \qquad d_{min,\ ij} < 8$$

我们只要在空间$[\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n]$上找到E的零点，便可符合题目的要求

3、用球状模型求解法（清华大学）

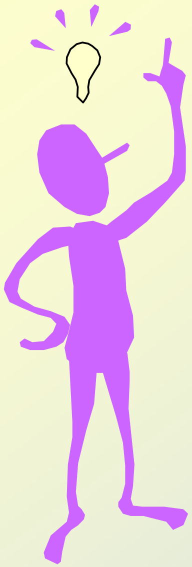
将每架飞机视为球状模型，整个区域视为二维平面。



当 $|\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$ 时两架飞机不碰撞

另类解法

重要结论



对第I，j架飞机，其飞行方向角改变量

$\Delta\theta_i$, $\Delta\theta_j$之和的一半即为其相对速度方向

β_{ij} 的改变量$\Delta\beta_{ij}$ ，亦即得：

$$\Delta\beta_{ij} = \frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2}$$

非线性规划模型

$$\min \quad Z = \varepsilon$$

$$\text{s.t.} \qquad \left|\beta_{ij} + \Delta\beta_{ij}\right| > \alpha_{ij} \qquad \Delta\beta_{ij} = \frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2}$$

$$\left|\Delta\theta_i\right| \le \varepsilon$$

$$\left|\Delta\theta_i\right| \le 30^0$$

$$0^0 \le \varepsilon \le 30^0$$

通过条件简化最终化为线性规划模型

另类非线性规划模型

$$\min f = \sum(\alpha_i - \alpha_{i0})^2$$

$$\text{s.t.} \quad \min D^2(\alpha_i, \alpha_j) \geq 64 \qquad (i,\ j = 1,2,\ldots,6,\ \ i \neq j),\ t > 0$$

或 $\quad t < 0$

其中 $\quad \min D^2(\alpha_i, \alpha_j) = \left(-\dfrac{\Delta y_{ij} S_{ij} + \Delta x_{ij} C_{ij}}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2} C_{ij} + \Delta x_{ij}\right)^2$

$$+\left(-\frac{\Delta y_{ij} S_{ij} + \Delta x_{ij} C_{ij}}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2} S_{ij} + \Delta y_{ij}\right)^2 = \frac{(\Delta x_{ij} S_{ij} - \Delta y_{ij} C_{ij})^2}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2}$$

$$t = -\frac{\Delta y_{ij} S_{ij} + \Delta x_{ij} C_{ij}}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2}$$

思考

改进后的模型

思考

$$\min\ f = \sum (C_{i,i0}{}^2 + S_{i,i0}{}^2)$$

$$\text{s.t.}\quad g_{ij}(X) = \min\ D^2(C_{i,i0}, C_{j,j0}, S_{i,i0}, S_{j,j0}) - 64 \geq 0$$

$$(i, j = 1,2,\ldots,6, i < j)$$

$$h_i(X) = 0$$

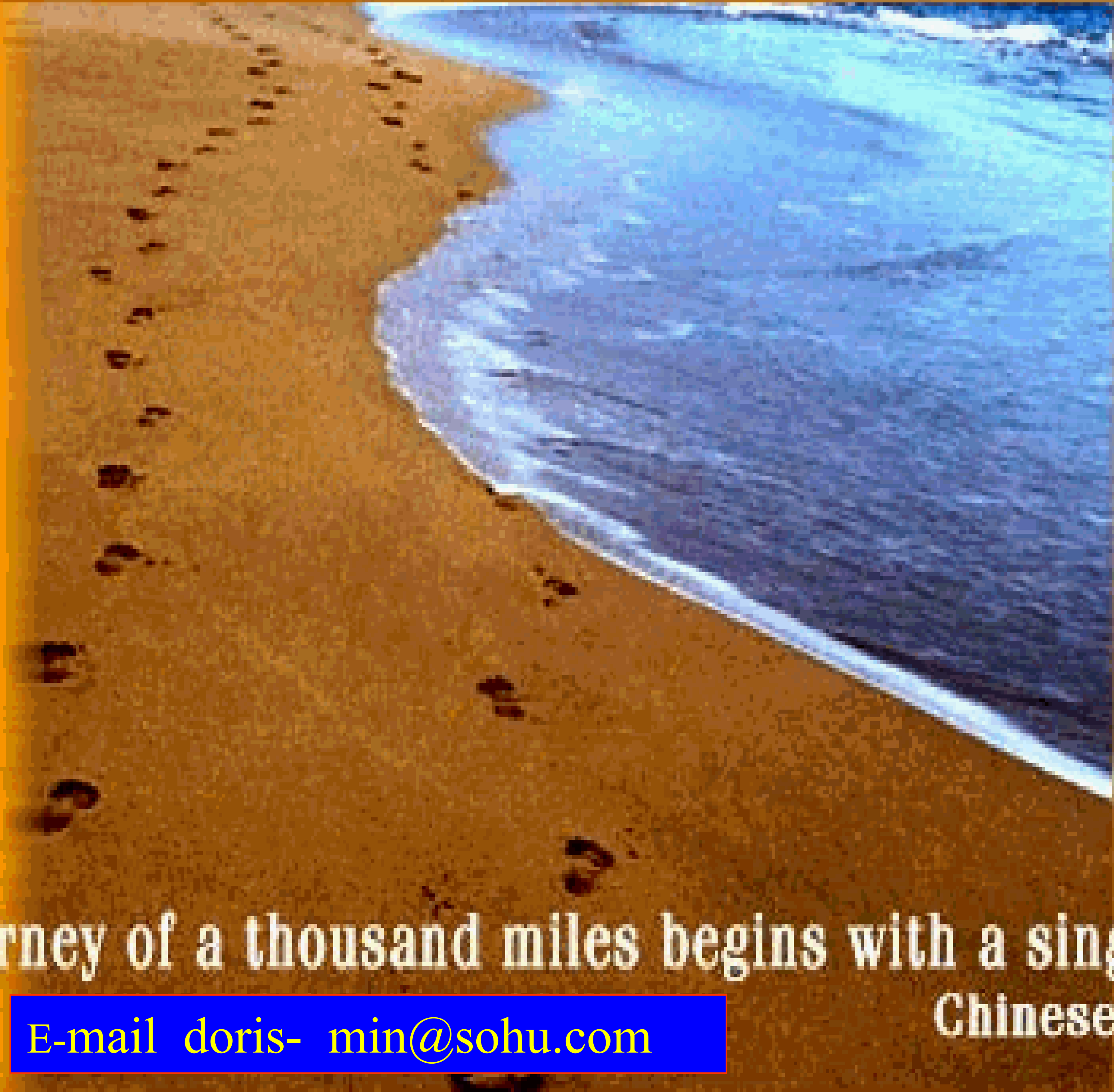
其中 $X = (C_{1,10}, C_{2,20}, \cdots, C_{6,60}, S_{1,10}, S_{2,20}, \cdots, S_{6,60})$

$$\min\ D^2(C_{i,i0}, C_{j,j0}, S_{i,i0}, S_{j,j0})$$

$$= \frac{((S_{i,i0} - S_{j,j0} + S_{i0,j0})\Delta x_{ij} - (C_{i,i0} - C_{j,j0} + C_{i0,j0})\Delta y_{ij})^2}{(S_{i,i0} - S_{j,j0} + S_{i0,j0})^2 + (C_{i,i0} - C_{j,j0} + C_{i0,j0})^2}$$

$$h_i(X) = (C_{i,i0} + \cos\ \alpha_{i0})^2 + (S_{i,i0} + \sin\ \alpha_{i0})^2 - 1$$

学习数学 热爱数学



E-mail doris- min@sohu.com