

概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中





Chapter 1

参数估计



1.1 一类离散总体的似然估计

统计研究中常常有这样一类离散型分布，分布律没有显示表达式，只能用离散概率单独表达。

例 1.1.1. 设总体 $X \sim B(1, p)$ ，求 p 的极大似然估计量 ($0 < p < 1$)。

解：0, 1 两点分布律常表示为

X	0	1
P	$1 - p$	p

设样本为 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，为求参数 p 的极大似然估计，似然函数为



$$L(p) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}, \quad 0 < p < 1$$

将两点分布等价地写成显示表达式

$$P\{X = k\} = p^k(1 - p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

建立似然函数

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\} \\ &= \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i} \\ &= p^{n\bar{x}}(1 - p)^{n-n\bar{x}} \end{aligned}$$

取对数



$$\ln L(p) = n\bar{x} \ln p + (n - n\bar{x}) \ln(1 - p)$$

求导数令为 0，建立似然方程

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0 \implies \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n - n\bar{x}}{1 - p} = 0$$

$$p = \bar{x}$$

由于

$$\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = -\frac{n\bar{x}}{p^2} - \frac{n - n\bar{x}}{(1 - p)^2} < 0$$

所以 p 的极大似然估计量为

$$\hat{p} = \bar{X}$$



例 1.1.2. 设 X 具有分布律:

X	a	b
P	$1 - p$	p

其中 $0 < p < 1$, a, b 均为已知常数, 求未知参数 p 的极大似然估计量。

设样本为 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}, \quad 0 < p < 1$$

再也找不到类似两点分布的等价的显示表达式

$$P\{X = k\} = ? \quad , \quad k = a, b$$



1.1.1 从样本值获得估计值

假设我们已经获得了 a, b 两点分布的样本数据 $\{a, b, b, a, a, b, a, a\}$, 则样本发生的概率为

$$L(p) = P\{X_1 = a, X_2 = b, \dots, X_8 = a\}$$

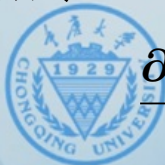
代入分布数据

$$L(p) = (1 - p)^5 p^3, \quad 0 < p < 1$$

取对数

$$\ln L(p) = 5 \ln(1 - p) + 3 \ln p$$

求导数令为 0, 建立似然方程



$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0 \implies \frac{-5}{1 - p} + \frac{3}{p} = 0$$

$$p = \frac{3}{8}$$

因为 $\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = -\frac{5}{(1-p)^2} - \frac{3}{p^2} < 0$, 所以 p 的极大似然估计值为 $\frac{3}{8}$ 。



1.1.2 获得极大似然估计量

构造两点分布的等价显示表达。令

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

则

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{\delta(x_i - a)} p^{\delta(x_i - b)}, \quad k = a, b$$

并设 n_1, n_2 分别为 n 个样品中等于 a 与等于 b 的个数(频数), 显然有 $n_1 + n_2 = n$ 。

似然函数为

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n (1 - p)^{\delta(x_i - a)} p^{\delta(x_i - b)} \\ &= (1 - p)^{\sum_{i=1}^n \delta(x_i - a)} p^{\sum_{i=1}^n \delta(x_i - b)} \\ &= (1 - p)^{n_1} p^{n_2} \end{aligned}$$



取对数并求 p 的导数令为 0

$$-\frac{n_1}{1-p} + \frac{n_2}{p} = 0 \implies p = \frac{n_2}{n}$$

由于 $\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = -\frac{n-n_2}{(1-p)^2} - \frac{n_2}{p^2} < 0$, 则 p 的似然估计量为

$$\hat{p} = \frac{n_2}{n}$$

进一步

$$\bar{x} = \frac{(n-n_2)a + n_2b}{n} \implies \frac{n_2}{n} = \frac{\bar{x} - a}{b - a}$$

所以参数 p 的极大似然估计量还可写为

$$\hat{p} = \frac{\bar{X} - a}{b - a}$$

