概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

重庆大学
1929
CHONGQING UNIVERSITY

Chapter 1

参数估计

1.1 一类离散总体的似然估计

统计研究中常常有这样一类离散型分布，分布律没有显示表达式，只能用离散概率单独表达。

例 1.1.1. 设总体 $X \sim B(1,p)$，求 p 的极大似然估计量 $(0 < p < 1)$。

解：$0,1$ 两点分布律常表示为

X	0	1
P	$1-p$	p

设样本为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，为求参数 p 的极大似然估计，似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\},\ 0 < p < 1$$

将两点分布等价地写成显示表达式

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$$

建立似然函数

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i=x_i\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{n\bar{x}}(1-p)^{n-n\bar{x}} \end{aligned}$$

取对数

$$\ln L(p)=n\bar{x}\ln p+(n-n\bar{x})\ln(1-p)$$

求导数令为 0，建立似然方程

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0 \Longrightarrow \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n - n\bar{x}}{1 - p} = 0$$

$$p = \bar{x}$$

由于

$$\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = -\frac{n\bar{x}}{p^2} - \frac{n - n\bar{x}}{(1-p)^2} < 0$$

所以 p 的极大似然估计量为

$$\hat{p} = \bar{X}$$

例 1.1.2. 设 X 具有分布律：

X	a	b
P	$1-p$	p

其中 $0<p<1$，a,b 均为已知常数，求未知参数 p 的极大似然估计量。

设样本为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i=x_i\},\ 0<p<1$$

再也找不到类似两点分布的等价的显示表达式

$$P\{X=k\}=\ ?\qquad ,\ k=a,b$$

1.1.1 从样本值获得估计值

假设我们已经获得了 a, b 两点分布的样本数据 $\{a, b, b, a, a, b, a, a\}$，则样本发生的概率为

$$L(p) = P\{X_1 = a, X_2 = b, \cdots, X_8 = a\}$$

代入分布数据

$$L(p) = (1-p)^5 p^3,\ 0 < p < 1$$

取对数

$$\ln L(p) = 5\ln(1-p) + 3\ln p$$

求导数令为 0，建立似然方程

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0 \Longrightarrow \frac{-5}{1-p} + \frac{3}{p} = 0$$

$$p = \frac{3}{8}$$

因为 $\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = -\frac{5}{(1-p)^2} - \frac{3}{p^2} < 0$，所以 p 的极大似然估计值为 $\frac{3}{8}$。

1.1.2 获得极大似然估计量

构造两点分布的等价显示表达。令

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

则

$$P\{X=k\}=(1-p)^{\delta(x_i-a)}p^{\delta(x_i-b)},\ k=a,b$$

并设 n_1,n_2 分别为 n 个样品中等于 a 与等于 b 的个数(频数)，显然有 $n_1+n_2=n$。

似然函数为

$$\begin{aligned}L(p) &= \prod_{i=1}^{n}(1-p)^{\delta(x_i-a)}p^{\delta(x_i-b)}\\ &= (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i-a)}p^{\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i-b)}\\ &= (1-p)^{n_1}p^{n_2}\end{aligned}$$

取对数并求 p 的导数令为 0

$$-\frac{n_1}{1-p}+\frac{n_2}{p}=0 \Longrightarrow p=\frac{n_2}{n}$$

由于 $\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2}=-\frac{n-n_2}{(1-p)^2}-\frac{n_2}{p^2}<0$，则 p 的似然估计量为

$$\hat{p}=\frac{n_2}{n}$$

进一步

$$\bar{x}=\frac{(n-n_2)a+n_2 b}{n} \Longrightarrow \frac{n_2}{n}=\frac{\bar{x}-a}{b-a}$$

所以参数 p 的极大似然估计量还可写为

$$\hat{p}=\frac{\bar{X}-a}{b-a}$$