概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

重庆大学
1929
CHONGQING UNIVERSITY

Chapter 1

第8章 假设检验

1.1 单正态总体均值的假设检验

一、σ^2 为已知，μ 的假设检验

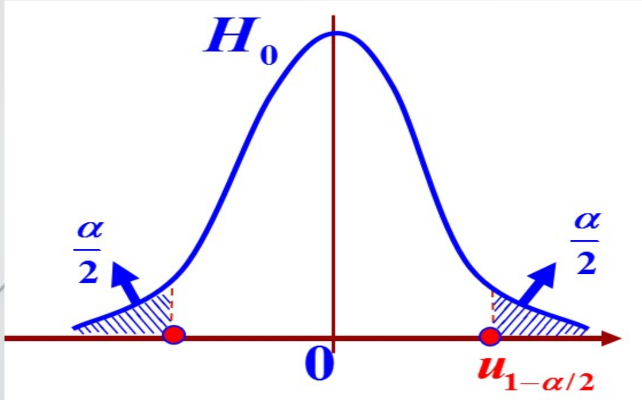
① $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

拒绝条件：如果 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 与 μ_0 相差过大，则拒绝 H_0

拒绝域形式：$\mathscr{X}_0 = \{|\bar{X} - \mu_0| > C\}$

在原假设下，由抽样分布定理：

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



则拒绝域为

$$\mathscr{X}_0 = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

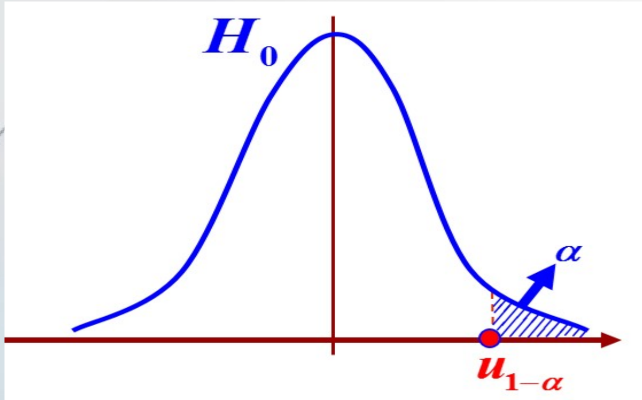
为形式上方便，常记 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，则拒绝域可写为

$$\mathscr{X}_0 = \left\{ |U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

称此时 μ 的假设检验为 U 检验法。

② $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$

拒绝条件：如果 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 比 μ_0 大很多，则拒绝 H_0

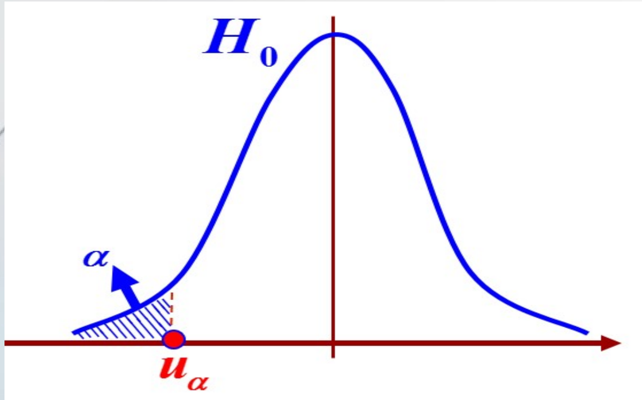


拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{U > u_{1-\alpha}\}$$

③ $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 比 μ_0 小很多，则拒绝原假设



拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{U < u_\alpha\}$$

其余情形类似，且拒绝域和前述的单尾，双尾情形一致。

④ $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu = \mu_1 \ (\mu_1 > \mu_0)$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 比 μ_0 大很多，则拒绝原假设

拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{U > u_{1-\alpha}\}$$

⑤ $H_0: \mu \leq \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 比 μ_0 大很多，则拒绝原假设

拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{U > u_{1-\alpha}\}$$

⑥ $H_0: \mu > \mu_0, \quad H_1: \mu \leq \mu_0$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 比 μ_0 小很多，则拒绝原假设

拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{U < u_{\alpha}\}$$

例 1.1.1. 由经验知某种零件重 $X \sim N(15, 0.05)$，技术革新后，抽测了 6 个样品，测得样本均值为 $\bar{x} = 14.9$，已知方差不变，问革新后这批零件平均重量是否仍为 15？$(\alpha = 0.05)$

解：由题意，这是正态总体均值的假设检验。

（1）提出统计假设：$H_0 : \mu = 15, \quad H_1 : \mu \neq 15$

（2）由于方差已知，选择 U 检验法；

（3）拒绝域为

$$\mathscr{X}_0 = \left\{ |U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

（4）取 $\mu_0 = 15$, $\sigma = \sqrt{0.05}$, $n = 6$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$，有

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{14.9 - 15}{\sqrt{0.05}/\sqrt{6}} \right| = 1.0954 < 1.96$$

则样本落在拒绝域之外，不拒绝 H_0，接受革新后这批零件平均重量仍为 15。

二、σ^2 未知时，μ 的假设检验

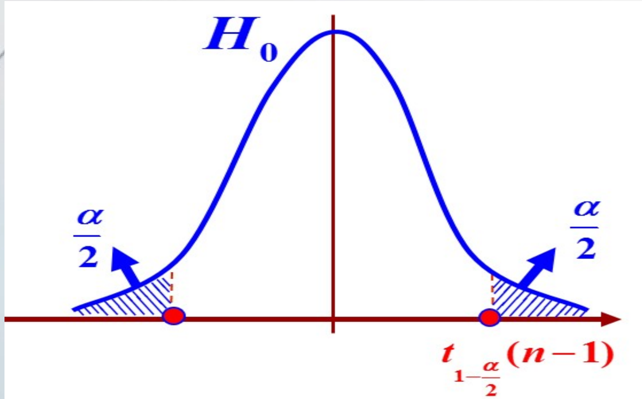
当方差未知时，U 检验不再适用。由抽样分布定理，我们有

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

① $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 与 μ_0 相差过大，则拒绝 H_0

由于 t 分布左右对称，与正态分布有相似的分位点



拒绝域可写为

$$\mathscr{X}_0 = \left\{ |T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

称此时 μ 的假设检验为 T 检验法。

前面是 T 检验的双尾检验，T 检验也有上、下两侧单尾的情形。

② $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 比 μ_0 大很多，则拒绝原假设

拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{T > t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

③ $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$

拒绝条件：如果 $\bar{X}$ 比 μ_0 小很多，则拒绝原假设

拒绝域：

$$\mathscr{X}_0 = \{T < t_{\alpha}(n-1)\}$$

④⑤⑥类似。

例 1.1.2. 某厂每日倾入河流废水中某物质含量不得超过 $3ppm$，连续 15 天记录为：

$$\mathbf{3.1\ 3.2\ 3.3\ 2.9\ 3.5\ 3.4\ 2.5\ 4.3\ 2.9\ 3.6\ 3.2\ 3.0\ 2.7\ 3.5\ 2.9}$$

设测定服从 $N(\mu,\sigma^2)$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 上判断该厂是否符合规定？

解：由于工厂长期存在，故由经验知工厂排染量是符合规定的，只有非常显著的大排污量，才否定它。

（1）提出统计假设：$H_0:\mu\le 3,\quad H_1:\mu>3$

（2）由于方差未知，选择 T 检验法；

（3）拒绝域为

$$\mathscr{X}_0=\{T>t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

（4）由样本数据计算得 $\bar{x}=3.2$，$s=0.4358$。取 $\mu_0=$

3，$n=15, t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(14)=1.7613$，有

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{3.2-3}{\sqrt{0.4258}/\sqrt{15}}=1.7774>1.7613$$

则样本落在拒绝域内，拒绝原假设，接受该厂排污量超标。