概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

重庆大学
1929
CHONGQING UNIVERSITY

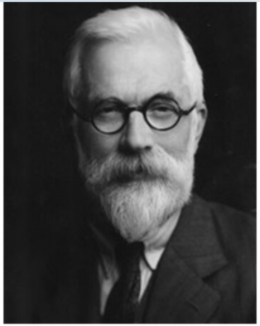
Chapter 1

参数估计

1.1 极大似然估计

1.1.1 似然原理与似然函数

我们发现了矩估计有很多缺陷，有没有一种新的估计方法来弥补这些缺陷呢？这就是极大似然估计。



R.A.Fisher (1890～1962)

完整的估计理论

参数的求解方法

动画流程是：
1. 无特别要求，请按语音自由发挥。

例 1.1.1. 一袋中有四只球，其中有红黑两色，已知两种颜色球数比为 $3:1$，但哪一种色球为 3 个不知道，只能通过有放回的抽样来了解。

设黑球所占比例为 p，则 $p = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$，为了确定 p，现作有放回的摸球试验。

① 第一次摸球为黑球，$p = ?$

记 $A = \{$摸出第一球为黑球$\}$

$$\text{若 } p = \frac{1}{4}: \quad P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{若 } p = \frac{3}{4}: \quad P(A) = \frac{3}{4}$$

即然 A 发生了，有理由认为 $P(A)$ 的概率较大，比较之下认为 $p = \frac{3}{4}$ 更似然一些。

② 第二次摸球为黑球，$p = ?$

记 $B = \{$第一次、二次摸球均为黑球$\}$

$$若\ p = \frac{1}{4}: \quad P(B) = \frac{1}{16}$$

$$若\ p = \frac{3}{4}: \quad P(B) = \frac{9}{16}$$

现在 B 发生了，因而 $P(B)$ 就不是小概率事件，比较之下认为

$$p = \frac{3}{4}$$

例 1.1.2. 设总体 $X \sim P(\lambda)$，求参数 λ 的极大似然估计量。

解：若抽取容量为 n 的样本，其观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，那么这 n 个样本发生的概率为

$$P\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} [\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}]$$

由于这一概率为 λ 的函数，记为似然函数 $L(\lambda)$，即

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}, \ \lambda > 0$$

$L(\lambda)$ 表示样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 发生的概率，由似然法思想，参数的极大似然估计 $\hat{\lambda}$ 应满足

$$L(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda > 0} L(\lambda)$$

由似然函数有

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}]=\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda},\lambda>0$$

作对数变换

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-n\lambda-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)$$

求导数

$$\frac{\partial\ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=0\Longrightarrow\frac{n\bar{x}}{\lambda}-n=0$$

$$\lambda=\bar{x}$$

由 $\frac{\partial^2\ln L(\lambda)}{\partial\lambda^2}=-\frac{n\bar{x}}{\lambda^2}<0$, $\bar{x}$ 是极大值点。所以 λ 的极大似然估计为 $\bar{x}$。

1.1.2 极大似然估计的一般步骤

极大似然估计的一般步骤为：

（1） 写出似然函数；

（2） 对似然函数取对数；

（3） 求导数；

（4） 解似然方程；

（5）判断最值点。