

# 事件的独立性 及其应用

教学设计与制作：刘琼荔



# 引例

炎热的夏天，大多数人会待在寝室里开空调避暑。

请问两隔壁寝室晚间同时开空调学习的事件相互有影响吗？



安装了空调的学生宿舍楼





在投篮中，他们分别投中2次,5次,8次的事件



教室里两盏日光灯同时损坏的事件；



同时抛掷三颗骰子，都出现5点的事件；



# 独立事件

定义：

假设有两个随机事件 $A, B$ ，如果  $P(A|B) = P(A)$   
则称事件 $A, B$ 相互独立。

注意：  $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

推广：

如果有三个随机事件 $A, B, C$ ，如果满足  
则称事件 $A, B, C$ 相互独立。

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$



# 例

网上爆料：某人在银行取10000元钱，竟取出3张100元人民币的假钞。



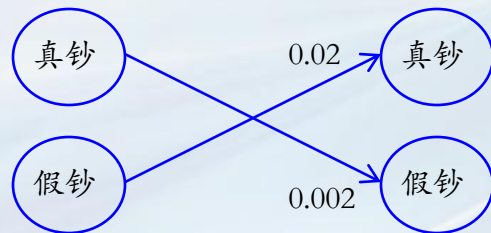
假设：1000张百元人民币中有4张假钞。

计算：从1000张中任取三张，三张都被检测为真钞的概率。

## 误检情况

实际

检测结果



# 计算

方法一：假设事件 $A_i$ ：“3张中有 $i$ 张假钞”， $i=0,1,2,3$

事件 $B$ ：“检测结果是3张都是真钞”。

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=0}^3 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= \sum_{i=0}^3 \frac{C_4^i C_{996}^{3-i}}{C_{1000}^3} \times 0.02^i \times 0.98^{3-i} \approx 0.93016 \end{aligned}$$





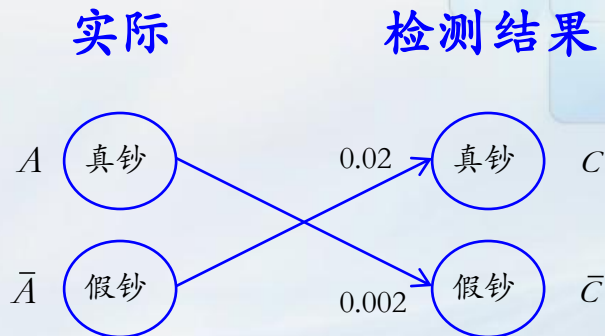
# 计算

方法二：采用事件的独立性计算

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P(C|A) + P(\bar{A})P(C|\bar{A}) \\ &= 0.996 \times 0.98 + 0.004 \times 0.02 = 0.97616 \end{aligned}$$

$$P(B) \approx (P(C))^3 \approx \boxed{0.93017}$$

误检情况



试问哪种方法简单、计算量小？



## 性质

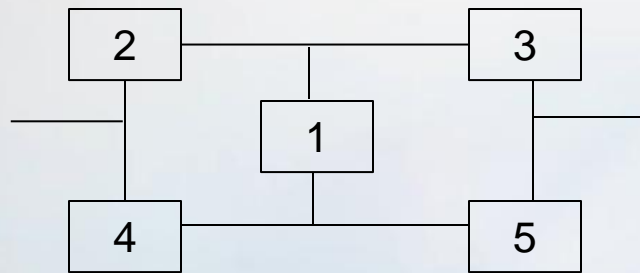
1. 如果事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 $B$ ， $A$ 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。
2. 如果事件 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 相互独立，将它们任意分成两组，并对组内的事件施行“并、交、差、补”运算后所得的复合事件也相互独立。例如 $A \cup B$ 与 $C$ ， $AC$ 与 $\bar{B}$ 等也相互独立。





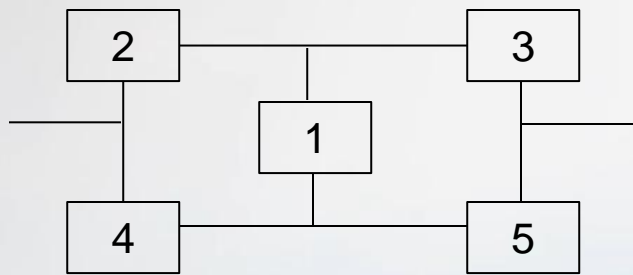
## 例 （利用事件独立的性质计算）

假设某电路由5个灯泡组装而成，连接方式如图所示。

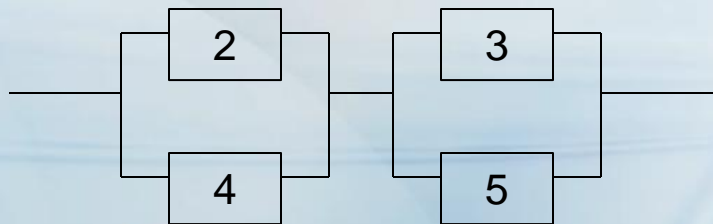


假设5个灯泡在某时间范围内各自都能正常工作的概率都为 $p$ ，且它们正常工作的事件是相互独立的。请问该电路在该时间范围内正常工作的概率是多少？





情形1: 灯泡1正常工作



(1) 系统S1

情形2: 灯泡1短路



(2) 系统S2



设 $A_i$ 表示第 $i$ 个灯泡正常工作, $S$ 表示电路正常工作。

$$P(S) = P(A_1)P(S_1 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(S_2 | \bar{A}_1) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P(S_1 | A_1) &= P\{(A_2 \cup A_4)(A_3 \cup A_5)\} \\ &= P(A_2 \cup A_4)P(A_3 \cup A_5) \\ &= [P(A_2) + P(A_4) - P(A_2A_4)]^2 \\ &= [2p - p^2]^2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S_2 | \bar{A}_1) &= P(A_2A_3 \cup A_4A_5) \\ &= P(A_2A_3) + P(A_4A_5) - P(A_2A_3A_4A_5) \\ &= 2p^2 - p^4 \quad (3) \end{aligned}$$

将(2)、(3)式的结果代入(1)式, 得到

$$P(S) = p(2p - p^2)^2 + (1 - p)(2p^2 - p^4)$$



# 小结

1. 事件的独立性概念
2. 简化计算
3. 性质及应用

