概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

重庆大学
1929
CHONGQING UNIVERSITY

Chapter 1

随机变量的数字特征

1.1 期望的线性性质及应用

老张的新问题：

项目	种水稻	养猪	存款利息	总和
平均值	6.2	4	1	11.2

是否有

$$E(X+Y+C)=E(X)+E(Y)+C$$

1.1.1 数学期望的线性性质

设 X, Y 是任意两个连续型随机变量，有

$$
\begin{aligned}
E(aX+bY+c) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+by+c)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}axf(x,y)dxdy \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}byf(x,y)dxdy \\
&\quad\quad + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}cf(x,y)dxdy \\
&= aE(X)+bE(Y)+c
\end{aligned}
$$

一般地，称

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$$

为数学期望的线性性质。

1.1.2 数学期望线性性质的应用

只要是多个变量的线性表达，我们都可以利用期望的线性性质来简化运算。求一个复杂变量的数学期望时，还可以它拆分成一列辅助变量的线性表达，利用线性和关系来解决。

例 1.1.1. 掷一枚骰子直到所有的点数都出现为止，求所需的抛掷次数的平均值。

解：设所需的抛掷次数为 X，又设 X_i 表示出现 i 个点数到出现 $i+1$ 个点数之间，所需的抛掷次数，$i=0,1,2,\cdots,5$，则

$$X = X_0 + X_1 + \cdots + X_5$$

显然，$X_0 = 1$。每个 X_i 服从几何分布 $X_i \sim G(\frac{6-i}{6})$，从而期望为

$$E(X_i) = \frac{6}{6-i}$$

所以由期望的线性性质

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E(X)} &= \mathbf{1} + \boldsymbol{E(X_1)} + \cdots + \boldsymbol{E(X_5)} \\ &= \mathbf{1} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} + \cdots + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{1}} \\ &= \mathbf{4.7} \end{aligned}$$