概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

重庆大学
1929
CHONGQING UNIVERSITY

Chapter 1

随机变量的数字特征

1.1 方差的性质与协方差

方差的性质：

① 设 c 为常数，则 $Dc = 0$ ；

若 $DX = 0$，有 $P\{X = EX\} = 1$。

② 设 a, b 为任意实数

$$
\begin{aligned}
D(aX + bY) &= E\left[(aX + bY) - E(aX + bY)\right]^2 \\
&= E\left[a(X - EX) + b(Y - EY)\right]^2 \\
&= a^2E(X - EX)^2 + b^2E(Y - EY)^2 \\
&\qquad + 2abE[(X - EX)\cdot(Y - EY)] \\
&= a^2DX + b^2DY + 2abE[(X - EX)(Y - EY)]
\end{aligned}
$$

[协方差]　设 (X,Y) 为二维随机变量，如果期望 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 存在，则称 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 为 X 与 Y 的协方差，并记为

$$cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

上式展开得到协方差的计算公式

$$cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$$

易知 $cov(X,Y)=cov(Y,X)$，且 $cov(X,X)=DX$。

于是和的方差公式可以改写为

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abcov(X,Y)$$

当 X,Y 相互独立时，$E(XY)=EX\cdot EY$，所以 $cov(X,Y)=0$，则和的方差公式简化为

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY$$

特别地，常数与任意随机变量相互独立，则

$$D(aX+b)=a^2DX+D(b)=a^2DX$$

推广到 n 维，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为随机变量且 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2DX_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_ia_jcov(X_i,X_j)$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2DX_i$$

③ 协方差的运算

$$
\begin{aligned}
cov(aX+bY,Z) &= E[(aX+bY-E(aX+bY))(Z-EZ)] \\
&= E[(a(X-EX)+b(Y-EY))(Z-EZ)] \\
&= aE[(X-EX)(Z-EZ)] \\
&\qquad +bE[(Y-EY)(Z-EZ)] \\
&= acov(X,Z)+bcov(Y,Z)
\end{aligned}
$$

协方差具有单变元的线性性质

$$cov(aX+bY,Z)=acov(X,Z)+bcov(Y,Z)$$

推广到 n 维随机变量的情形

$$cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, Z\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i cov(X_i,Z)$$

例 1.1.1. 将 n 只球($1 \sim n$ 号)随机放入 n 只盒子($1 \sim n$ 号)中去，且一只盒子只装一只球。若球号与盒子编号相同，称为一个配对。记 X 为总的配对数，求 EX，DX。

解：设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 只球与盒子配对} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 只球与盒子不配对} \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n,$

则

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

又 $X_i \sim B(1, \frac{1}{n})$，所以 $EX_i = \frac{1}{n}$，$DX_i = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})$。

由数学期望的线性性质

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

由和的方差公式

$$DX=\sum_{i=1}^{n}DX_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}cov(X_i,X_j)$$

其中 X_i,X_j 不独立，所以

$$cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-EX_i\cdot EX_j,\quad (i\neq j)$$

把 X_iX_j 看作一个随机变量，只有 $0,1$ 两种取值，则

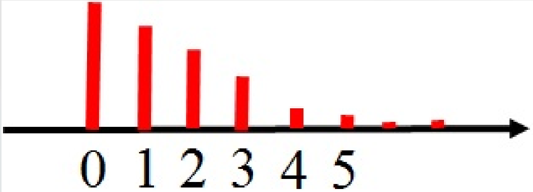
$$E(X_iX_j)=P\{X_i=1,X_j=1\}=\frac{1}{n(n-1)}$$

从而

$$cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-EX_i\cdot EX_j=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2},\quad (i\neq j)$$

代入和的方差公式

$$DX=n\left[\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})\right]+n(n-1)\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}\right]=1$$



动画流程是：

1. 出现坐标轴；
2. 出现0,1,…,5坐标点；
3. 依次出现红色的线柱。