

MATHEMATICAL MODEL

# 投资领域中 的优化问题

主讲：刘琼荪



# 投资领域中的优化问题

- 投资策略  $x_{ij}$  表示第*i*年初投资项目*j*的资金额

项目 年	A	B	C	D
第一年	$\sqrt{\phantom{x}}(x_{11})$			$\sqrt{\phantom{x}}(x_{14})$
第二年	$\sqrt{\phantom{x}}(x_{21})$		$\sqrt{\phantom{x}}(x_{23})$	$\sqrt{\phantom{x}}(x_{24})$
第三年	$\sqrt{\phantom{x}}(x_{31})$	$\sqrt{\phantom{x}}(x_{32})$		$\sqrt{\phantom{x}}(x_{34})$
第四年	$\sqrt{\phantom{x}}(x_{41})$			$\sqrt{\phantom{x}}(x_{44})$
第五年				$\sqrt{\phantom{x}}(x_{54})$

15%

25%

40%

6%



# 投资领域中的优化问题

## 1、问题分析

第一年初: 10万元全部投入项目A, D, 有:  $x_{11} + x_{14} = 10$

第二年初: 拥有的资金为项目D第1年投资 $x_{14}$ 收回的本息, 全部投向A, C, D, 有:  $x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06 x_{14}$

第三年初: 拥有的资金为项目A第1年投资 $x_{11}$ 收回的本息和  
第二年项目D投资 $x_{24}$ 收回的本息, 全部投向A, B,  
D, 有:  $x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15 x_{11} + 1.06 x_{14}$

.....



# 投资领域中的优化问题

## 2、数学模型

$$\max \quad 1.15x_{41} + 1.4x_{23} + 1.25x_{32} + 1.06x_{54}$$

$$s.t. \quad x_{11} + x_{14} = 10$$

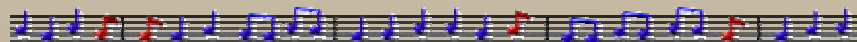
$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15x_{11} + 1.06x_{24}$$

$$x_{41} + x_{44} = 1.15x_{21} + 1.06x_{34}$$

$$x_{54} = 1.15x_{31} + 1.06x_{44}$$

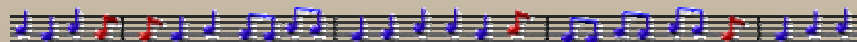
$$x_{23} \leq 3, x_{32} \leq 4, x_{ij} \geq 0$$



# 投资领域中的优化问题

- 资金最优使用方案

设有400万资金,要求4年内使用完,若在一年内使用资金 $x$ 万元,则可以获得效益  $\sqrt{x}$  万元(效益不能再使用). 当年不用的资金可存入银行,年利率为10%, 试制定出这笔资金的实用方案,使4年内的经济效益为最大.

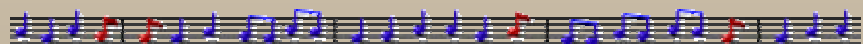


# 投资领域中的优化问题

## 1、问题分析

针对400万元资金，不同的使用方案，4年内所获得的效益总和是不同的。

比如第一年将400万元全部用完，则获得效益为20万元；若前三年均不使用，而将它存入银行，则第四年本息和为： $400 \times (1.1)^3 = 532.4$ (万元)，再将它全部用完，则效益总和为23.07万元。问题是制定一种最优的使用方案，使得4年的经济效益总和最大。



# 投资领域中的优化问题

## 2、模型假定

- 设第一、二、三、四年使用的资金数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4$ ；
- 问题是使4年的经济效益总和达最大，而不是4年后的资金总和最大；
- 如果没有使用资金，则不会产生效益；



# 投资领域中的优化问题

## 3、模型建立

目标函数：
$$\max z = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}$$

约束条件：

第一年： $0 \leq x_1 \leq 400;$

第二年： $0 \leq x_2 \leq (400 - x_1) * 1.1;$

第三年： $0 \leq x_3 \leq [(400 - x_1) * 1.1 - x_2] * 1.1;$

第四年： $0 \leq x_4 \leq \{[(400 - x_1) * 1.1 - x_2] * 1.1 - x_3\} * 1.1;$





# 投资领域中的优化问题

## 3、模型建立

目标函数：
$$\max z = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}$$

约束条件：

$$x_1 \leq 400;$$

$$1.1x_1 + x_2 \leq 440;$$

$$1.21x_1 + 1.1x_2 + x_3 \leq 484;$$

$$1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 + x_4 \leq 532.4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



# 投资领域中的优化问题

## 4、模型求解

### Matlab 程序

% 目标函数

```
function y=totle(x)
```

```
y=-sqrt(x(1))- sqrt(x(2))- sqrt(x(3))- sqrt(x(4)) ;
```

% 约束条件

```
A=[1.1,1,0,0;1.21,1.1,1,0;1.331,1.21,1.1,1];
```

```
b=[440,484,532.4]';
```

```
lb=[0,0,0,0]';
```

```
ub=[400,1000,1000,1000]';
```

% 执行文件touzi1.m

```
x0=[100,100,100,100]';
```

```
[x,fval]=fmincon('totle',x0,A,b,[],[],lb,ub)
```



# 投资领域中的优化问题

## 5、计算结果

	第一年	第二年	第三年	第四年
现有资金	400	356.6	284.2	182.2
使用资金	84.2	106.6	128.9	148.2

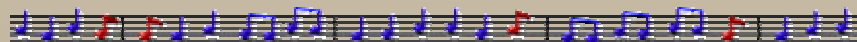
4年效益总和为43.1万元，这是20万元的两倍多，这反映出进行定量的优化计算的作用。



# 投资领域中的优化问题

- 资金投资优化组合决策

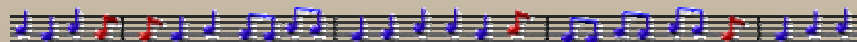
市场上有几种资产（如股票、债券等） $S_i (i=1,2,\dots,n)$ 供投资者选择，某公司有数额为M万元的一笔相当大的资金可用做一个时期的投资。公司财务分析人员对几种资产进行了评估，估算出在这一时期内购买 $S_i$ 的平均收益率为 $r_i$ ，并预测出购买 $S_i$ 的风险损失率为 $q_i$ 。考虑到投资越分散，总的风险越小，公司决定，当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用所投资的 $S_i$ 中最大风险来度量。



# 投资领域中的优化问题

## 1、模型假定

- 购买 $S_i$ 要付交易费，费率为 $p_i$ ；
- 当购买不超过给定值 $u_i$ 时，交易费按购买 $u_i$ 计算；
- 假定同期银行存款利率是 $r_0 = 5\%$ ，且既无交易费又无风险；
- 平均收益率( $r_i$ ) = 期望收益率/总投资；
- 风险定义为实际因素会给投资者带来的最大可能损失额；
- 风险损失率( $q_i$ ) = 风险/总投资；
- 假设只考虑一个投资周期；
- 设 $x_i$ 表示对 $S_i$ 种资产的投资比率；( $i = 1, 2, \dots, n. 0 \leq x_i \leq 1$ )



# 投资领域中的优化问题

## 2、模型建立

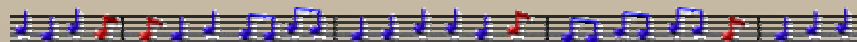
(1) 交易费用函数:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & M * x_i = 0 \\ u_i * p_i, & 0 < M * x_i \leq u_i \\ M * x_i * p_i, & M * x_i \geq u_i \end{cases}$$

(2) 将银行也看做是一种资产,其中 $r_0 = 5\%$ , $q_0 = 0$ , $p_0 = 0$ , $u_0 = 0$ .

(3) 一个投资周期内的净收益为:

$$V = \sum_{i=0}^n (M * x_i * r_i - F(x_i))$$



# 投资领域中的优化问题

## 2、模型建立

(4) 总体风险函数:  $RI = \max_i \{M * x_i * q_i\}$

目标函数为:  $\max V \quad \text{and} \quad \min RI$

约束条件为: 
$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n x_i = 0 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

转化为单目标非线性规划模型-----偏好系数加权法

设  $\mu$  和  $(1-\mu)$  分别为净投资收益和总投资风险的权重值.



# 投资领域中的优化问题

## 2、模型建立

偏好系数加权法

目标函数为:

$$\min T = (1 - \mu) \max_i \{M * x_i * q_i\} - \mu * \sum_{i=0}^n (M * x_i * r_i - F(x_i))$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n x_i = 0 \\ 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \mu \in [0, 1] \end{cases}$$

注意: 权重值  $\mu$  和  $(1 - \mu)$  分别表示公司决策者对投资净收益和总体投资风险的重视程度. 若注重投资收益, 敢于冒风险。





# 投资领域中的优化问题

## 2、模型建立

线性规划模型:

引入变量 $t$ , 令  $t = \max_i \{M * x_i * q_i\}$

$$\min T = (1 - \mu) * t - \mu * \sum_{i=0}^n (M * x_i * r_i - F(x_i))$$

$$\begin{cases} M * x_i * q_i \leq t \\ \sum_{i=0}^n x_i = 0 \\ 0 \leq x_i \leq 1, \mu \in [0, 1] \\ M * x_j * q_j = t, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

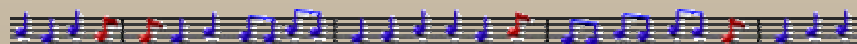


# 投资领域中的优化问题

## 3、算例

$M=5000$ 元

$S_i$	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	$u_i(\%)$
S0	5	0	0	0
S1	28	2.5	1	103
S2	21	1.5	2	198
S3	23	5.5	4.5	52
S4	25	2.6	6.5	40



# 投资领域中的优化问题

## 4、计算结果

不同  $\mu$  值对应的最佳投资组合 (  $M=5000$ 万元 )

$\mu$	x0	x1	x2	x3	x4	v	risk
0.00	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5%	0
0.10	0.000	0.245	0.408	0.111	0.236	20.8%	0.61%
0.22	0.000	0.375	0.625	0.000	0.000	22%	0.94%
0.50	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	27%	2.5%
1	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	27%	2.5%



# The End

