均匀分布与指数分布

教学设计与制作：李曼曼

引例

1. 设重庆虎溪站某路公共汽车每隔5分钟一班，乘客随机到站，求某乘客随机地去乘车而候车时间不超过3分钟的概率。

2. 家用电器的寿命分布？动物的寿命分布？

1. 连续型随机变量的概率密度函数

定义 对于随机变量X，如果存在非负可积函数

$f(x)\ (-\infty < x < +\infty)$，使对任意 $a, b\ (a < b)$ 都有

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

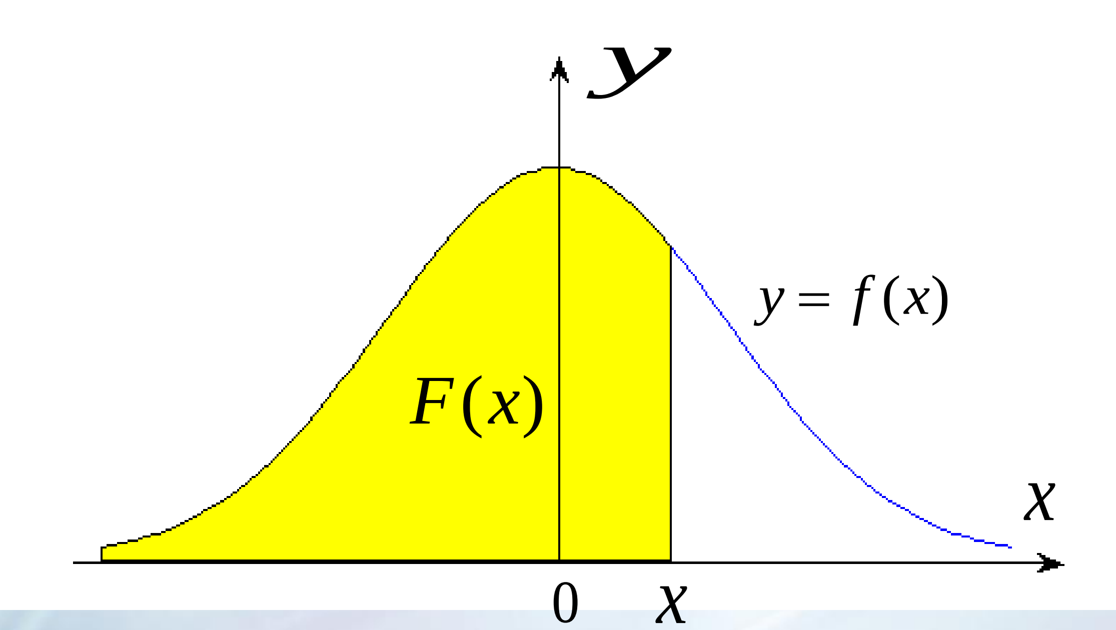
则称X为连续型随机变量，并称 $f(x)$ 为连续型随机变量X的概率密度函数.

分布函数与密度函数几何意义

重要性质：

非负性 $f(x) \geq 0$

规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



分布函数与密度函数关系示意图

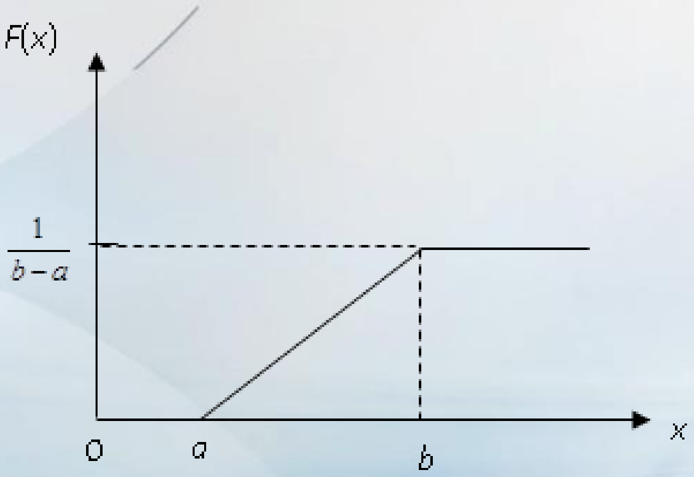
2. 均匀分布 $U[a, b]$

设连续型随机变量X在有限区间$[a, b]$上取值，其概率密度为

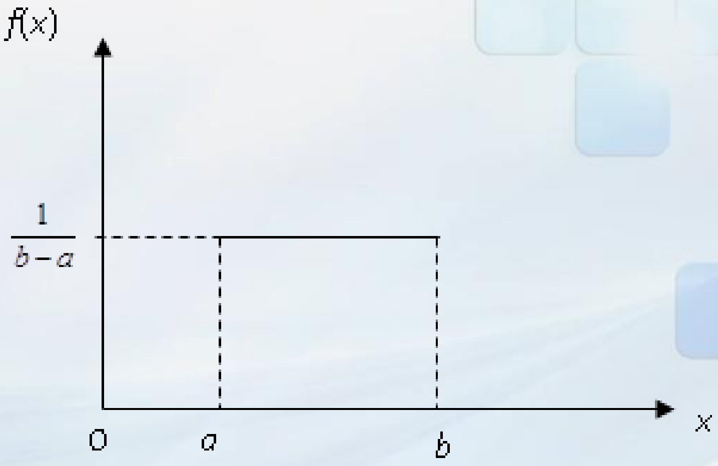
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称 X 服从区间$[a, b]$上的**均匀分布**，记 $X \sim U[a, b]$.

均匀分布图（矩形分布）



均匀分布 $U[a,b]$ 的分布函数 $F(x)$ 曲线图



均匀分布 $U[a,b]$ 的密度函数 $f(x)$ 曲线图

例1.（引例1）

解. 等车时间 X 服从[0, 5]上的均匀分布，故其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & 0\le x\le 5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

候车时间不超过3分钟的概率为

$$P\{0\le X\le 3\}=\int_0^3\frac{1}{5}dx=\frac{3}{5}$$

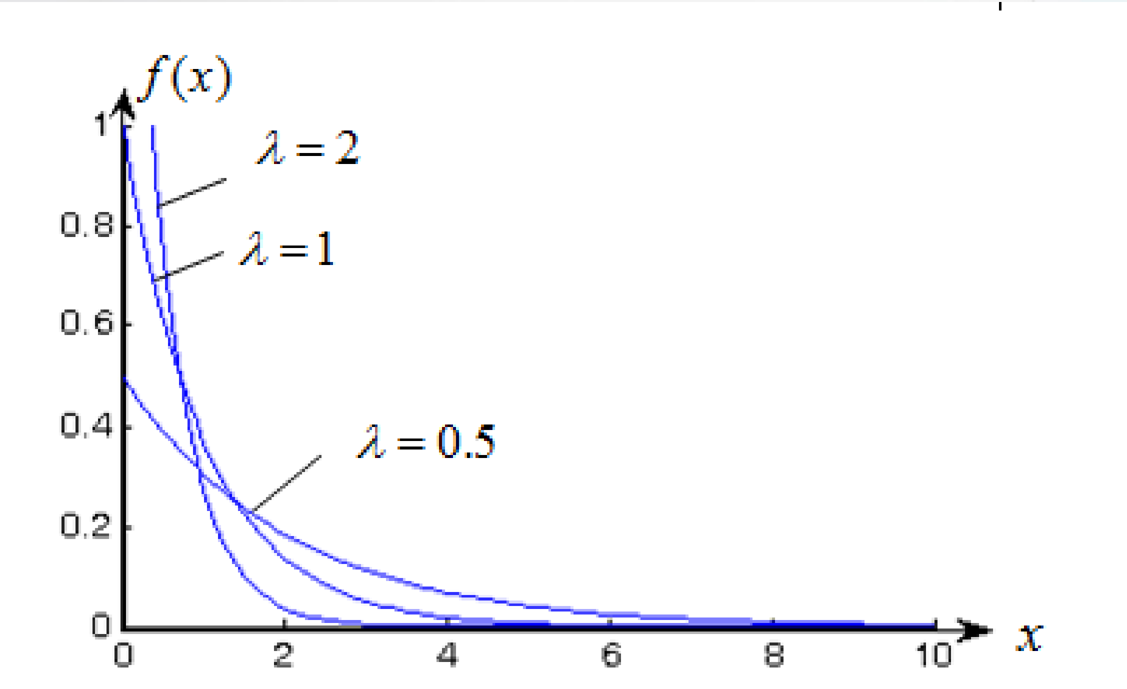
3. 指数分布 $\Gamma(1,\lambda)$

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布。

指数分布描述的**实例**：随机服务系统中的服务时间；电话问题中的通话时间；指数分布常作为各种“寿命”分布的近似(引例2)。



f(x)
λ = 2
λ = 1
λ = 0.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
x

指数分布的“无记忆性”

命题 若 $X \sim \boldsymbol{\Gamma(1, \lambda)}$ ，则

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}$$

故又把指数分布称为“永远年轻”的分布.

例2. 设一大型设备上某元件在任何长为 t 的时间内发生故障次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，求

（1）该元件使用寿命 T 的密度函数；

（2）该元件已正常使用10小时的情况下,再正常运行 10 小时的概率.

解. （1）$F_T(t)=P\{T\le t\}=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-P\{T>t\}, & t>0\end{cases}$

$$P\{T>t\}=P\{N(t)=0\}=\frac{(\lambda t)^0e^{-\lambda t}}{0!}=e^{-\lambda t}$$

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \lambda e^{-\lambda t}, & t>0\end{cases}$$

即 $X \sim \Gamma(1,\lambda)$；

(2) 由指数分布的“无记忆性”，有

$$P\{T>20 \mid T>10\}=P\{T>10+10 \mid T>10\}$$

$$=P\{T>10\}=e^{-10\lambda}$$

小结

（1）均匀分布 $U[a, b]$（矩形分布）

（2）指数分布 $\Gamma(1, \lambda)$

（3）无记忆性