污染问题

本文针对污染问题，建立了湖泊污染的一阶微分方程模型，叙述了求解过程及结果 ，并对模型及结果进行分析 ；进而告知人们对湖波的污染问题应引起足够地重视。

一. 问题

湖泊为人们提供了大量的水资源,还可以养鱼,运输,也是人们旅游的场所.但是湖泊也承受着人们倾倒的垃圾,污物.它们越来越受到工业和生物水的污染,如洗涤剂中的磷酸盐,杀虫剂中的DDT和各种重金属化学元素等.这些污染物会杀死水中的鱼类和各种水生的动,植物.过多的磷酸盐将导致水体富营养化而发出难闻的气味.

湖水污染的治理工作是困难的.因为一般湖水

覆盖的区域较大,周围的污染源较为复杂,很难指明所有污染的原因.另一方面产生的污染现象总是与社会的政治和经济上的因素有着千丝万缕的联系,不考虑这些因素很难得到全面的治理.通常治理水体污染的办法是依靠自然的过程,靠水体本身的自净能力来缓解污染.这对河流的污染一般是有效的,因为它一旦被污染通常可以很快地进行自我清洁.对于被污染的湖水来说不是一件容易的事情.因为

被污染的水体将相当长的时间留在湖中.仅仅靠生物的降解作用,一个大的湖泊要花费多长时间才能使得它的污染程度有明显的改善呢?

针对湖泊的特点建模来描述湖水的污染问提.

本问题我们从以下几个方面加以讨论：

1、问题的假设

2、参数的设定

3、模型的建立求解与分析

4、思考与讨论

1. 问题的假设:

（1）把湖泊看成是一个单流入, 单流出的系统. 即不考虑 不同的污染物所造成的污染, 不考虑从不同的渠道流入与流出湖泊之间的区别. 只考虑携带污染物的水流入湖泊和湖泊中的水流出对湖水污染程度的影响.

（2）湖中的任何局部水体在湖中的污染状况与水体在湖中的位置无关. 即流入湖泊的污染物能以很快的速度与湖中的水均匀混合.

(3) 参与模型的变量是连续变化且充分光滑的.

(4) 湖水的体积保持不变.即由降水等原因所引起的流入物增量与被蒸发,渗漏所造成的损失量互相抵消.并且不考虑湖水体积在季节上的变化.

(5) 不考虑生物学因素在水体自净过程中的作用。污染物除流出外不因腐烂沉积或其它任何手段从湖水中消失.

2. 参数设定：

$r_1(t)$------- t 时刻流入湖水的流速；

$p_1(t)$------- t 时刻流入湖水的污染物的浓度；

$r_0(t)$------- t 时刻流出湖水的流速；

$p_0(t)$------- t 时刻流出湖水的污染物的浓度；

$p(t)$ ------- t 时刻湖水中污染物的浓度；

$V(t)$ ------- t 时刻湖水的体积

3. 模型的建立

考虑在时间(t, $t+\Delta t$)内 湖内污染物的变化:

湖内污染物的改变量 = 流入的污染物量—流出的污染物量.

于是对于充分小的Δt有:

$$p(t+\Delta t)V(t+\Delta t)-p(t)V(t) = [p_1(t)r_1(t)-p_0(t)r_0(t)]\Delta t$$

由假设3，这些量都是连续而且充分光滑的;

由假设4，有 $v(t)=v$(常数).

令Δt 趋向于零，得到:

$$V\frac{\partial}{\partial t}p = p_1(t)\ r_1(t) - p_0(t)\ r_0(t)$$

由于V 为常数,故有 $r_1(t) = r_0(t)$;

令 Δt 趋向于零，得到：

$$V\frac{\partial}{\partial t}p = p_1(t)\ r_1(t) - p_0(t)\ r_0(t)$$

由于V 为常数，故有 $r_1(t) = r_0(t)$；

由假设2，流出的污染物应与湖水中污染物有相同的浓度即

$$p_0(t) = p(t).$$

如果再假定从湖中流出的湖水的流速为常数，于是有

$$r_1(t) = r_0(t) = r_0.$$

这样，我们得到：

$$V\frac{\partial}{\partial t}p = r_0(p_1(t) - p(t))$$

令

$$\tau = V / r_0,$$

则 τ 给出了排尽湖水所需要的时间, 称为湖水的保留时间.

从而湖水污染的模型为:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} p = p_1 - p$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t} p = (p_1 - p) / \tau \qquad (1)$$

4. 模型分析：

对不同的输入p_1(t)将导致不同的结论.

情形1：设p_1(t) = K(常数).

它表明污染物每天以其平均值流入湖泊内，它描述了自由污染的情况.

若在初始时刻 t = 0 有p(0) = p_s 由模型(1)

得解为：

$$p(t) = (p_s - K)e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + K.$$

从这个结论可以看出:

1. 当 $p_s > K$ 时, 即流入量的浓度比湖水的浓度小, 所以湖中污染物的浓度将随时间而逐渐减少;

当 $p_s < K$时污染物的浓度随时间而增加,而且有

$\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = K$.则K为湖泊的最终污染状况.

2. 由模型(1)：

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} p = p_1 - p \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial t} p = (p_1 - p)/\tau$$

可以看出：

当流入浓度 K 给定时,湖水污染物浓度的变化速率只依赖于湖水的保留时间 τ ，并与 τ 的大小成反比.

3. 记 $\beta = p(t)/K$ 为湖水在 t 时刻的污染水平

如果记 $\beta = 1$ 为标准污染水平；

$\beta > 1$时，为超标准污染水平.容易看出，这时的湖水的污染物浓度将不断下降；

$\beta < 1$ 时，湖水的污染状况.不断加重.

4. 若$p_s = 0$， 即对于一湖清水，则t 时刻的污染水平为：

$$\beta(t)=1-e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

对于给定的水平$\beta<1$，湖水的污染程度达到水平β所需要的时间为

$$t_\beta=-\tau\ln(1-\beta).$$

特别当$\beta=0.5$时有$t_{\frac{1}{2}}=\tau\ln 2=0.7\tau$.

若$p_s\neq0$，当$p_s/K<\beta$时湖水达到污染水平β所需要的时间为

$$t_\beta=\tau\ln[(1-\beta_0)/(1-\beta)]\text{，其中}\beta_0=p_s/K.$$

5. 若K=0，即没有污染物流入，这时湖水将会以最快的速度得到净化。

情形2：设$p_1(t) = K_0 e^{(-\alpha t)}$，$\alpha > 0$，它说明什么？

从而模型为：

$$\frac{\partial}{\partial t}p = -p(t)/\tau + K_0 e^{(-\alpha t)}/\tau \qquad (2)$$

若令 $p(0) = K_0$，则上方程有解：

$$p(t) = (K_0/(1-\alpha\tau))(e^{(-\alpha t)} - \alpha\tau e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}).$$

不难验证p(t)是 t 的单调减函数，并且$\lim_{t\to 8} p(t) = 0$ 它表明了什么？

这里仅对$p(0) = K_0$进行了讨论，那么对$p(0) = p_s$情况怎么样呢?

请读者给出模型的分析.

更进一步，如果是一般的输入形式$p(t)$，那么模型(1)在初始条件 $p(0) = p_s$ 下将有解:

$$p(t) = e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}[p_s + \tau^{(-1)} \int_0^t p_1(y)\, e^{\left(\frac{y}{\tau}\right)} dy. \qquad (3)$$

你能利用它给出一般情形下的分析吗?

情形3:是情形1与情形2的组合，在初期湖泊属于自由污染阶段，当湖水被污染到一定的水平 β （$\beta<1$），

将对污染源进行管理和控制，对此我们进行如下的讨论：

在自由污染阶段设：$p_s=0$，$p_1=K_1$，

则湖水将在：

$$t_\beta=-\tau\ \ln(1-\beta)\qquad(\beta<1)$$

时，达到 β 水平的污染，即 $p(t_\beta)=\beta K_1$.

在对污染源进行管理和控制阶段，降低排污量，

设：$p_1 = K_2 < \beta K_1$，

从而有输入函数 $p_1(t)$：

当 $t < t_\beta$ 时：　$p_1(t) = K_1$，

当 $t \geqslant t_\beta$ 时：　$p_1(t) = K_2$，

代入(3)则其污染状况为：

当 $t < t_\beta$ 时：　$p(t) = K_1\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)$，

当 $t \geqslant t_\beta$ 时：　$p(t) = (\beta K_1 - K_2)\, e^{\left(-\frac{t-t_\beta}{\tau}\right)} + K_2$.

如果控制阶段污染程度逐渐降低，如情形2所示，则有：

当 $t < t_\beta$ 时： $p_1(t) = K_1$，

当 $t \geqslant t_\beta$ 时： $p_1 = \beta K_1 e^{(-\alpha t)}$，

$p_s = 0$.

请你将其代入(3)具体地分析污染情况.

4. 思考与讨论

1. 关于蒸发与渗漏: 对于一些大的湖泊蒸发与渗漏是湖水减少的不可忽略的因素,放宽约束条件

$$r_1 = r_0$$

令 r_0 =kV(t).这样在建模过程的平衡方程中就要增加一个输出项Ap(t)V(t).这就需要对参数A进行估计,这将不是一件容易的事.

2. 关于污染物: 不同的污染物对湖水污染的影响行为是不同的,如DDT与磷,前者几乎不可能在生物圈内消除,而后者,则可以通过反复进入生物圈而逐步消失,深入建模时应与考虑.

3. 对于快速混合: 这是一个不切实际的假设,很可能与实际情况相去甚远,但如果考虑污染物在湖内的阔散过程，将大大增加模型的复杂程度,当然至于由这个假设所带来的误差,也应给出一个大致的估计.