

假设检验

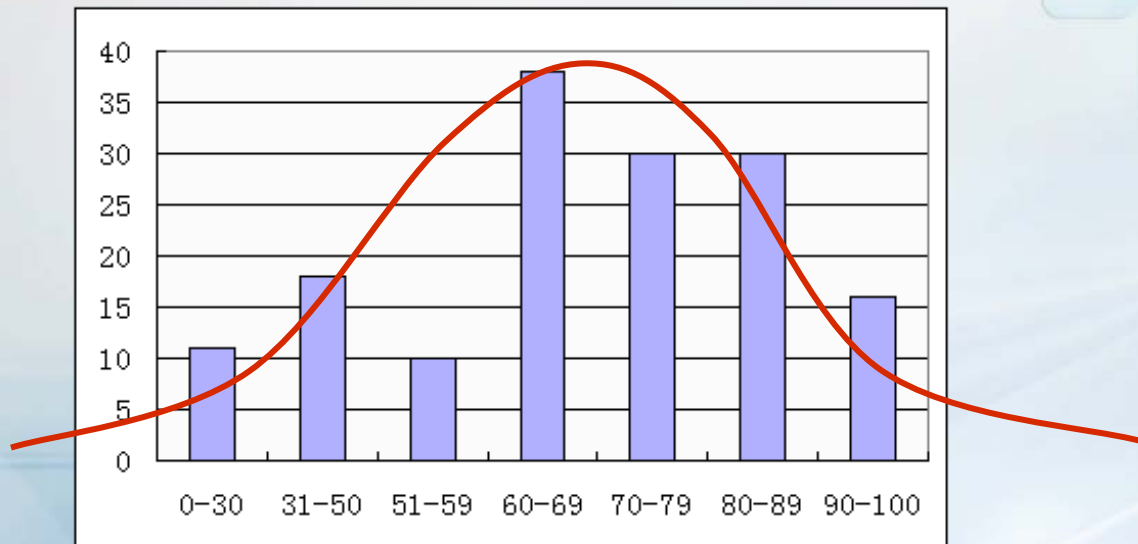
主讲人：荣腾中



问题1 某餐厅每天的营业额服从正态分布，以往老菜单时 $X \sim N(8000, 640^2)$ 。现推出新菜单，9天中平均每天的营业额为8300元。假设前后两菜单引起的方差不变，问新菜单**是否有效果**？



问题2 学校某次概率论与数理统计课程考试后，某班学生成绩统计柱状图如下



问能否认为学生成绩呈正态分布?

1. 假设检验分类

x_1, x_2, \dots, x_n

现象

本质

参数

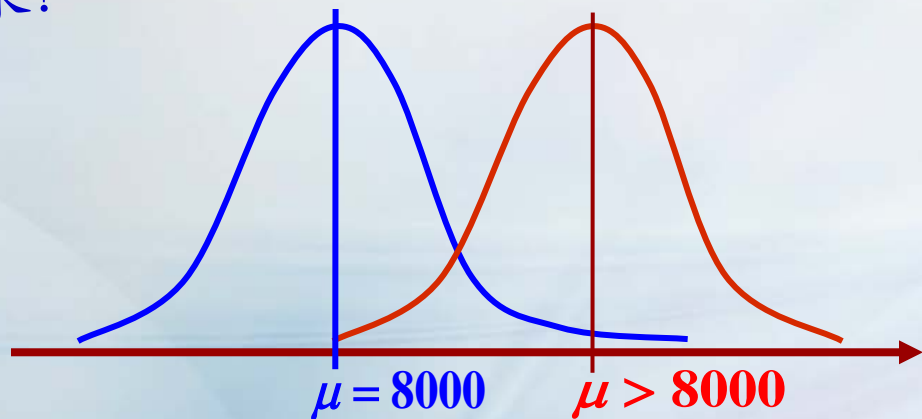
假设
检验

非参数



2. 待检验问题

例1 某餐厅每天的营业额服从正态分布，以往老菜单时 $X \sim N(8000, 640^2)$ 。现推出新菜单，9天中平均每天的营业额为8300元。假设前后两菜单引起的方差不变，问新菜单是否有效果？



$$n = 9$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 8300$$

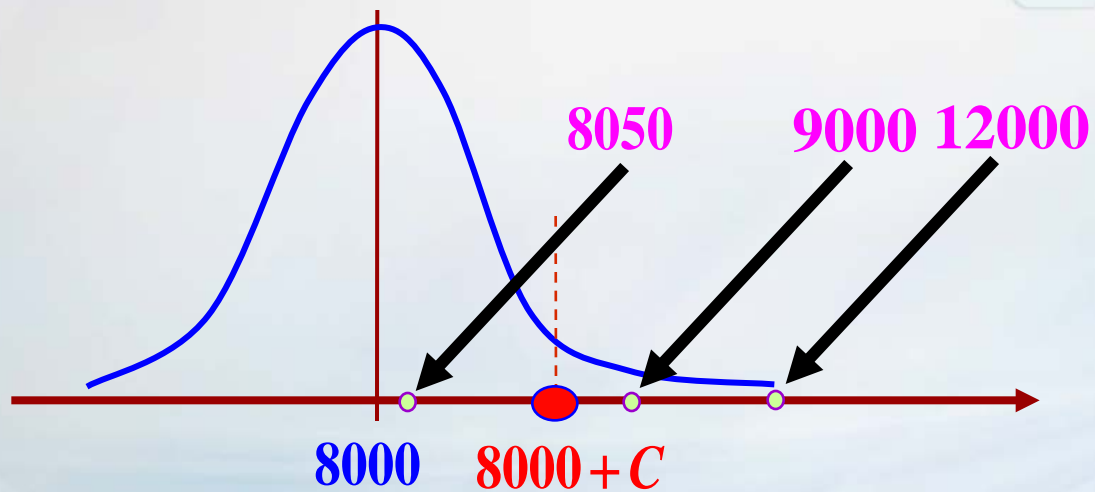
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

问题提炼为

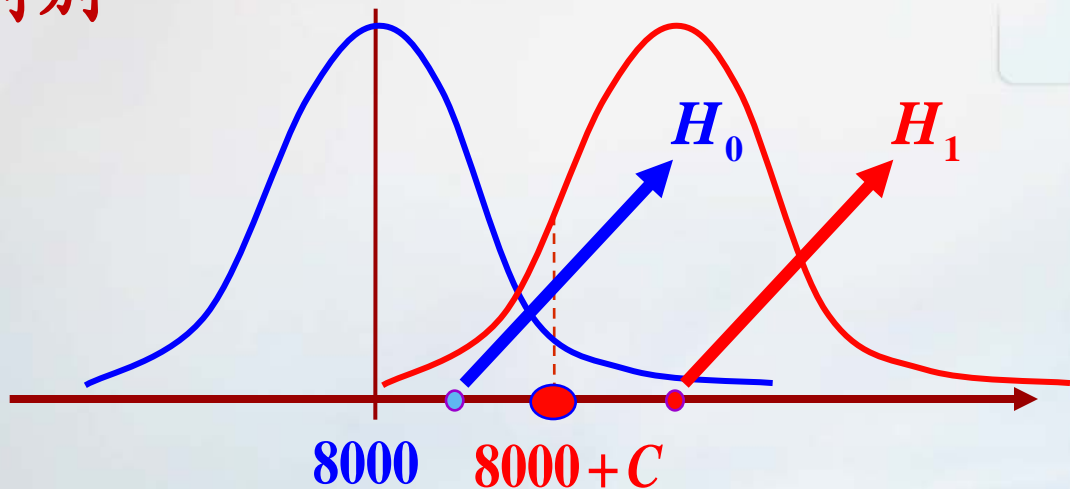
$$H_0: \mu = 8000, \quad H_1: \mu > 8000$$



如何判别



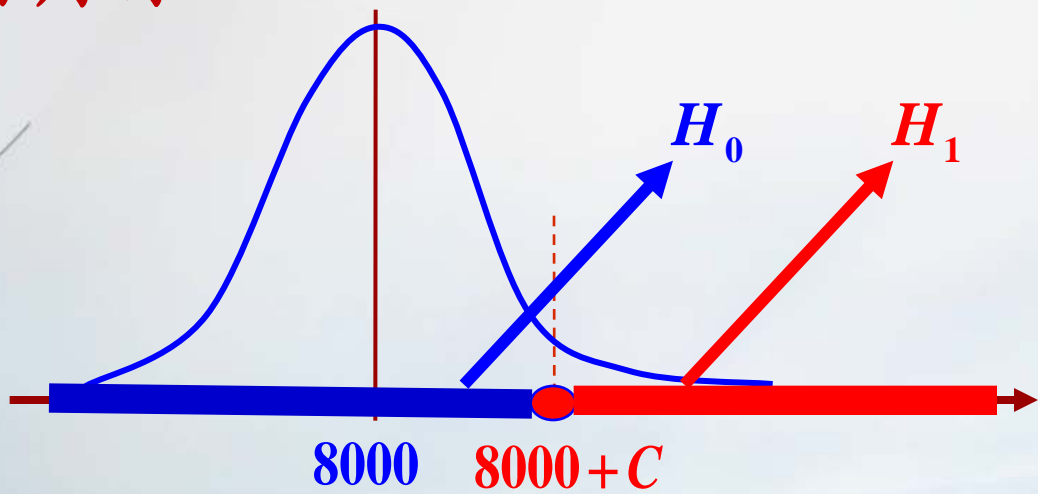
如何判别



1. 当 $\bar{X} - 8000 \leq C$ 时，我们没有充分的理由认为 H_0 不成立，即不拒绝 H_0 ；
2. 当 $\bar{X} - 8000 > C$ 时，我们不再认为 H_0 成立，即拒绝原假设 H_0 ，接受备选假设 H_1 。



如何判别



拒绝域：称

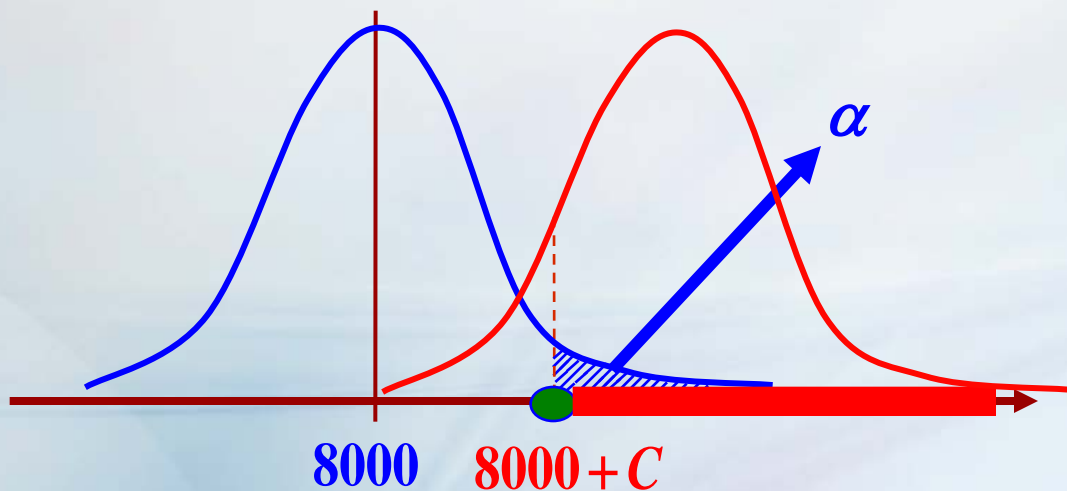
$$\{\bar{X}(x_1, x_2, \dots, x_n) - 8000 > C\}$$

里的所有的样本点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为 H_0 的拒绝域，记为 χ_0 。



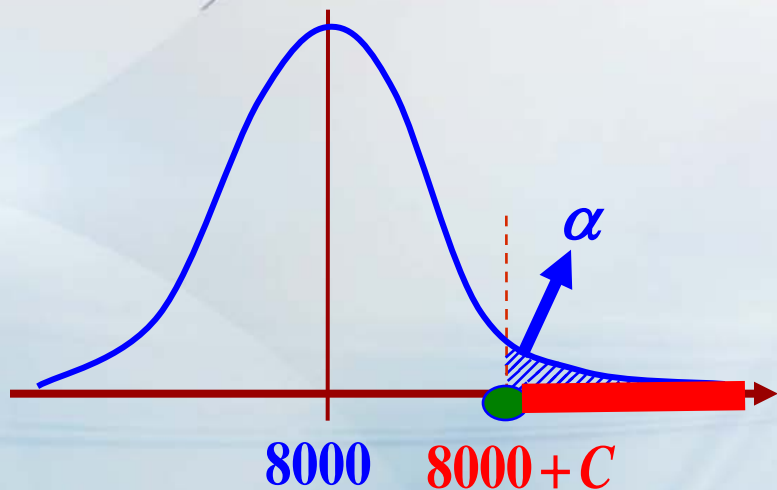
3. 检验原理

[小概率事件原理]: 如果某事件发生的概率很小, 则在一次抽样调查中几乎不会发生!



小概率 α 被视为显著水平.

临界值确定



$$\alpha = P\{\chi_0 | H_0\}$$

$$= P\{\bar{X} - 8000 > C | \mu = 8000\}$$

$$= P\left\{\frac{\bar{X} - 8000}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 8000\right\}$$

由正态分布分位点可知

$$\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} = u_{1-\alpha} \Rightarrow C = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$$



例1的检验结果

由拒绝域 $\chi_0 = \left\{ \bar{X} - 8000 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \right\}$

取显著性水平 $\alpha = 0.05$ ，有 $u_{1-\alpha} = 1.64$ ， $\sigma = 640$ ， $n = 9$

所以餐厅的样本所成的拒绝域可表示为

$$\chi_0 = \{ \bar{X} > 8350.9 \}$$

由 $\bar{X} = 8300$ ，样本落在拒绝域之外，

故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下， H_0 仍成立，即新菜单没有明显的效果。



4. 假设检验基本步骤:

(1) 根据实际问题和已知信息提出原假设和备选;

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

(2) 分析并提出 H_0 的拒绝域的形式;

$$\chi_0 = \{\bar{X} - \mu_0 > C\}$$

(3) 给定显著性水平 α , 确定 H_0 拒绝域的待定系数;

(4) 样本观测值作出比较, 由小概率事件原理作出判断.

