规范型零和博弈与矩阵博弈

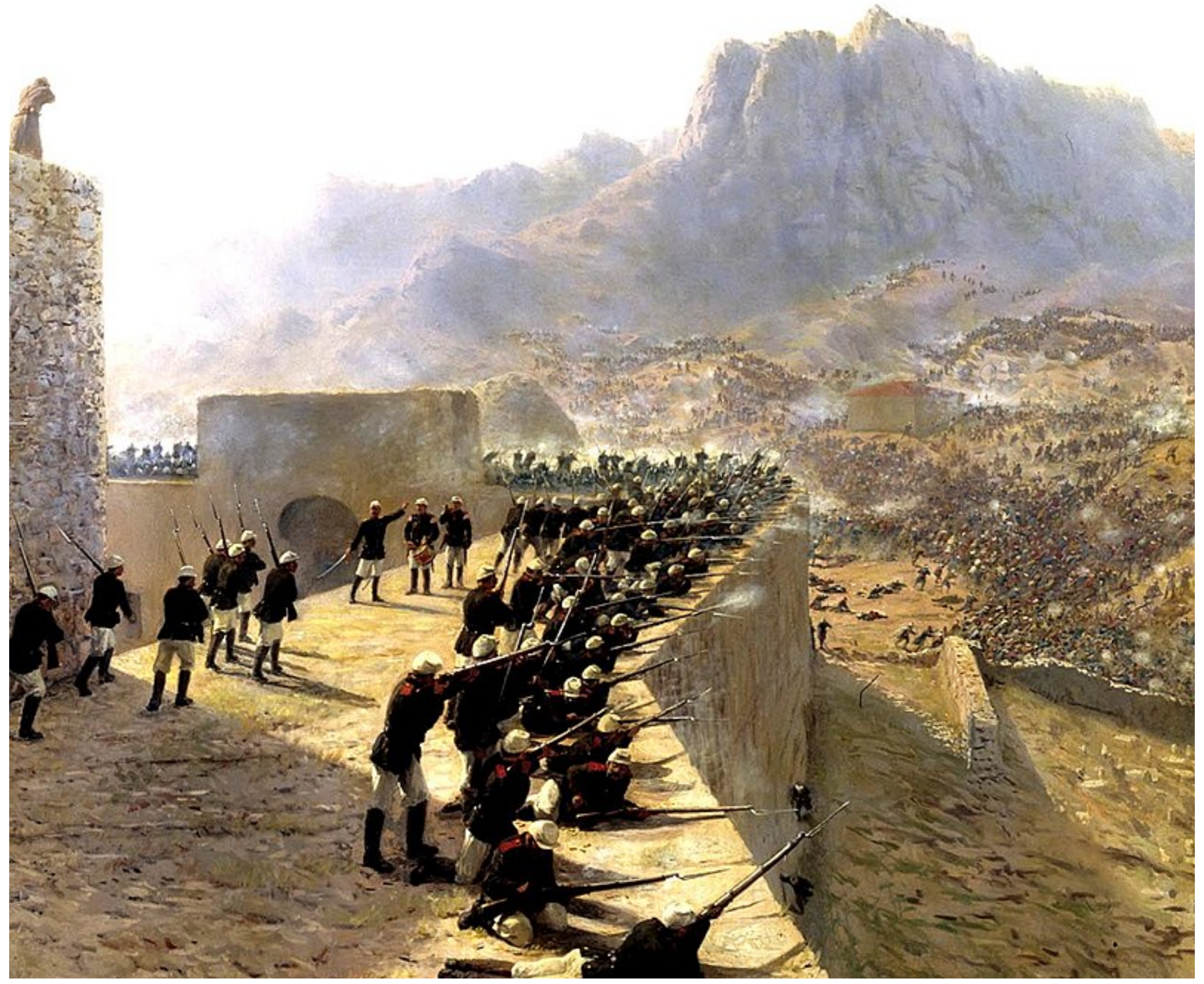
奥万纳斯·彼得罗相

数学副博士

Saint Petersburg State University

SPbU

布鲁多上校博弈



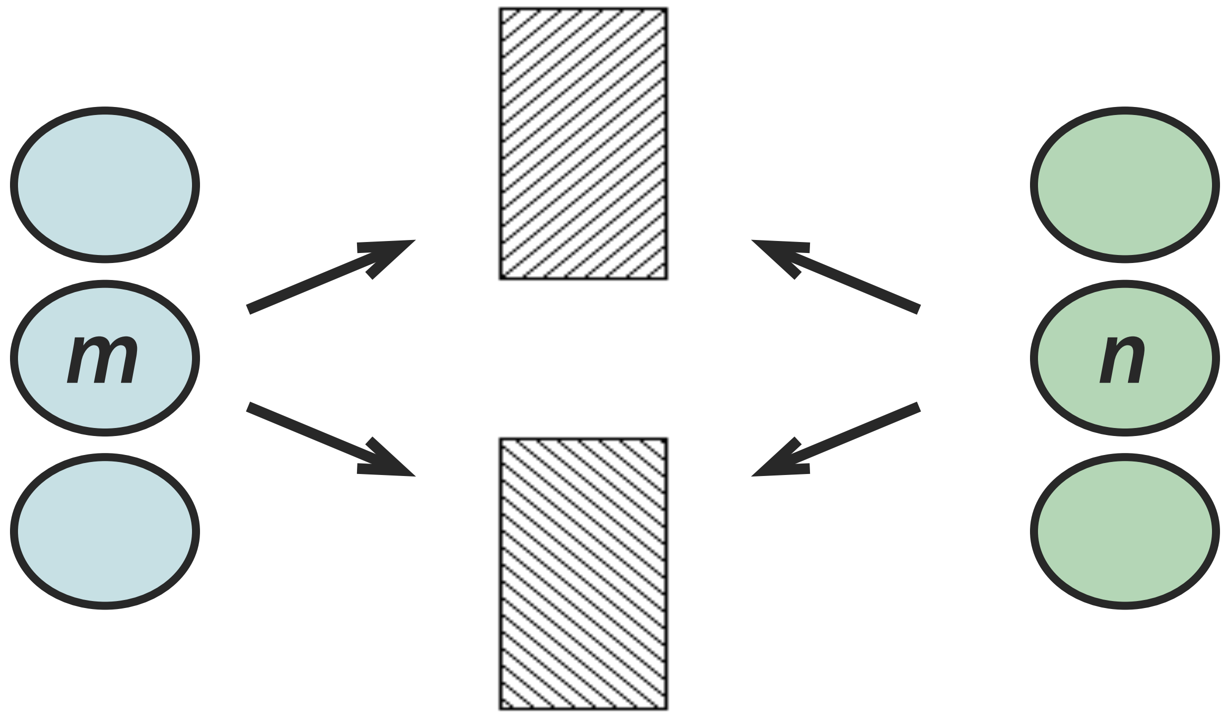
1877年6月8日俄土战争贝耶泽要塞保卫战

作者：拉戈里奥·列夫·费利克索维奇(1891)

- 布鲁多上校拥有 m 个军团
- 他的敌人有 n 个军团

布鲁多上校必须为两个阵地找到最佳的军团分配。

布鲁多上校博弈



- 在每个阵地上，军团数量多的一方获胜。
- 双方都不知道对方在每个阵地会投入多少军团。

规范型二人零和博弈

定义:
系统
$$\Gamma = (X, Y, K),$$
称为规范型二人零和博弈, 其中X和Y是局中人1和2的策略集, 对应的函数为
$K: X \times Y \longrightarrow R^1$

说明:

- $x \in X$ – 局中人1的策略
  $y \in Y$ – 局中人2的策略
- $(x, y) \in X \times Y$ – 博弈$\Gamma = (X, Y, K)$中的局势
- $K(x, y)$ – 局中人1的支付函数
  $[-K(x, y)]$ – 局中人2的支付函数

规范型二人零和博弈

定义:
系统
$$\Gamma = (X, Y, K),$$
称为规范型二人零和博弈, 其中X和Y是局中人1和2的策略集, 对应的函数为 $K\colon X \times Y \longrightarrow R^1$,

布鲁多上校博弈.

- $x = (x_1, x_2) \in X$, 其中 $x_1 + x_2 = m$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.
  $y = (y_1, y_2) \in Y$, 其中 $y_1 + y_2 = n$, $y_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

- $K(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y)$, $h_i(x, y) = \begin{cases} y_i + 1, \text{如果 } x_i > y_i \text{ (布鲁多上校获胜)}, \\ 0, \text{如果 } x_i = y_i, \\ -(x_i + 1), \text{如果 } x_i < y_i \text{ (布鲁多上校失败)}, \end{cases}$

  $[-K(x, y)]$ – 局中人2的支付函数

规范型二人零和博弈

定义:
具有有限策略集合的二人零和博弈称为矩阵博弈。

说明:

- $\Gamma_A = (X, Y, K)$ – 矩阵博弈
- $x_i \in X$, 其中 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ – 局中人1的策略
  $y_j \in Y$, 其中 $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – 局中人2的策略
- $(x_i, y_j) \in X \times Y$ – 博弈 $\Gamma_A = (X, Y, K)$ 中的局势
- $K(x_i, y_j) = a_{i,j}$ – 局中人1的支付函数
  $[-K(x_i, y_j)] = -a_{i,j}$ – 局中人2的支付函数

矩阵博弈

定义:
具有有限策略集合的二人零和博弈称为矩阵博弈。

局中人的策略:
$x_i = (m-i, i)$,
$y_j = (n-j, j)$.

布鲁多上校博弈 ($m = 4$, $n = 3$):

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} n+2, & \text{当 } m-i > n-j,\ i > j, \\ n-j+1, & \text{当 } m-i > n-j,\ i = j, \\ n-j-i, & \text{当 } m-i > n-j,\ i < j, \\ -m+i+j, & \text{当 } m-i < n-j,\ i > j, \\ j+1, & \text{当 } m-i = n-j,\ i > j, \\ -m-2, & \text{当 } m-i < n-j,\ i < j, \\ -i-1, & \text{当 } m-i = n-j,\ i < j, \\ -m+i-1, & \text{当 } m-i < n-j,\ i = j, \\ 0, & \text{当 } m-i = n-j,\ i = j. \end{cases}$$

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京:科学出版社.
2. 张维迎. (2004). 博弈论与信息经济学. 上海:上海人民出版社.
3. 谢识予. (2002). 经济博弈论. 上海: 复旦大学出版社 .
4. 杨荣基, 彼得罗相, 李颂志. (2007). 动态合作—尖端博弈论. 北京:中国市场出版社.
5. Peters, H. (2008). Game Theory. A Multi-Leveled Approach.
   Berlin: Springer-Verlag.

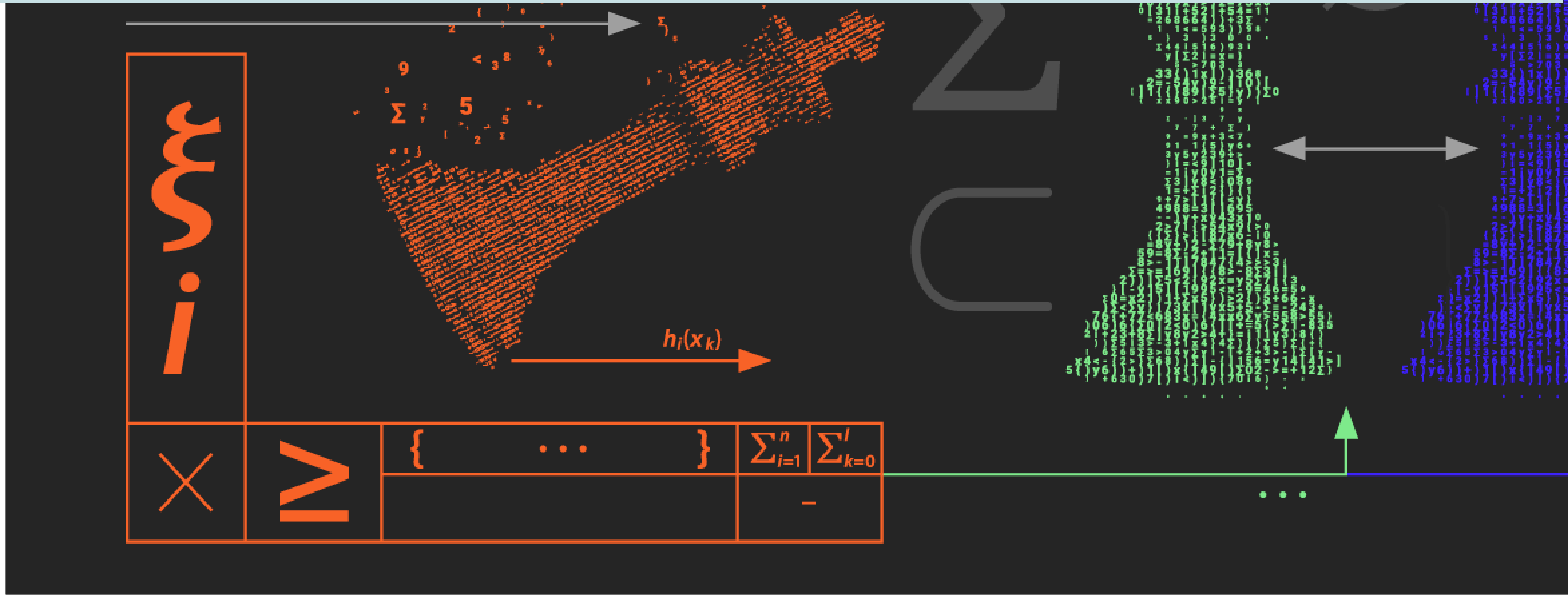
Saint Petersburg
State
University
www.spbu.ru

Saint Petersburg
State
University

鞍点

奥万纳斯·彼得罗相

数学副博士



最大最小策略与最小最大策略

定义:

局中人1的最大最小策略是 x_{i_0}, 如果

$$\max_{x_i \in X} \min_{y_j \in Y} K(x_i, y_j) = \min_{y_j \in Y} K(x_{i_0}, y_j) = \underline{v}$$

其中 $\underline{v}$ – 博弈的下值。

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{1n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \min_j a_{0j} \\ \min_j a_{1j} \\ \cdots \\ \min_j a_{mj} \end{array}\right\} \max_i \min_j a_{ij}$$

最大最小策略与最小最大策略

定义:

局中人2的最小最大策略是 y_{j_0}，如果

$$\min_{y_j \in Y} \max_{x_i \in X} K(x_i, y_j) = \max_{x_i \in X} K(x_i, y_{j_0}) = \overline{v}$$

其中 $\overline{v}$ – 博弈的上值。

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{1n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i0} \quad \max_i a_{i1} \quad \cdots \quad \max_i a_{in}}_{\min_j \max_i a_{ij}}$$

布鲁多上校博弈

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

布鲁多上校该如何行动?
他该选择什么样的策略?

布鲁多上校博弈

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

假设敌人选择策略 y_1,
那么布鲁多上校应当选择 x_1:

$$\max_{x_i \in X} K(x_i, y_1) = K(x_1, y_1).$$

布鲁多上校博弈

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

但布鲁多上校并不能提前知道敌人会选择什么策略!

布鲁多上校博弈

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

布鲁多上校可以确保他的收益:

$$\underline{v} = \max_{x_i \in X} \min_{y_j \in Y} K(x_i, y_j) = a_{0,3} = a_{4,0} = 0.$$

无论敌人的策略是如何选择，布鲁多上校的收益将不低于0，此时他选择策略x_0或者x_4!

布鲁多上校博弈

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

类似地，敌人也可确保其收益:

$$\overline{v} = \min_{y_j \in Y} \max_{x_i \in X} K(x_i, y_j) = a_{1,1} = a_{3,2} = 3.$$

无论布鲁多上校采取何种策略，其敌人的损失不会超过3，
此时敌人选择最小最大策略y_1或者y_2!

布鲁多上校博弈

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

在此博弈中

$$\underline{v} = \max_{x_i \in X} \min_{y_j \in Y} K(x_i, y_j) \neq \min_{y_j \in Y} \max_{x_i \in X} K(x_i, y_j) = \overline{v},$$

$$0 \neq 3.$$

另一个矩阵博弈的例子

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_0 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

在此博弈中

$$\max_{x_i \in X} \min_{y_j \in Y} K(x_i, y_j) = \min_{y_j \in Y} \max_{x_i \in X} K(x_i, y_j) = K(x_1, y_0) = 2.$$

均衡局势

定义:
在二人零和博弈 $\boldsymbol{\Gamma = (X, Y, K)}$ 中, 局势 $\boldsymbol{(x^*, y^*)}$ 称为均衡局势或鞍点,
如果满足:

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*),\ \forall x \in X,$$

$$K(x^*, y) \ge K(x^*, y^*),\ \forall y \in Y.$$

均衡局势的存在性

定理：（矩阵博弈中均衡局势存在的充分必要条件）
在矩阵博弈 $\Gamma = (X, Y, K)$ 中存在均衡局势，当且仅当满足以下等式：

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \overline{v}.$$

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京: 科学出版社.
2. 张维迎. (2004). 博弈论与信息经济学. 上海: 上海人民出版社.
3. 谢识予. (2002). 经济博弈论. 上海: 复旦大学出版社.
4. 杨荣基, 彼得罗相, 李颂志. (2007). 动态合作—尖端博弈论. 北京: 中国市场出版社.
5. Fudenberg, D., Tirole, J. (2002). 博弈论. 北京: 中国人民大学出版社.
6. Peters, H. (2008). Game Theory. A Multi-Leveled Approach. Berlin: Springer-Verlag.
7. Mazalov, V. V. (2014). Mathematical game theory and applications. New York: Wiley.
8. Petrosyan, L. A., Zenkevich, N. A. (2016). Game theory. Singapore: World Scientific.

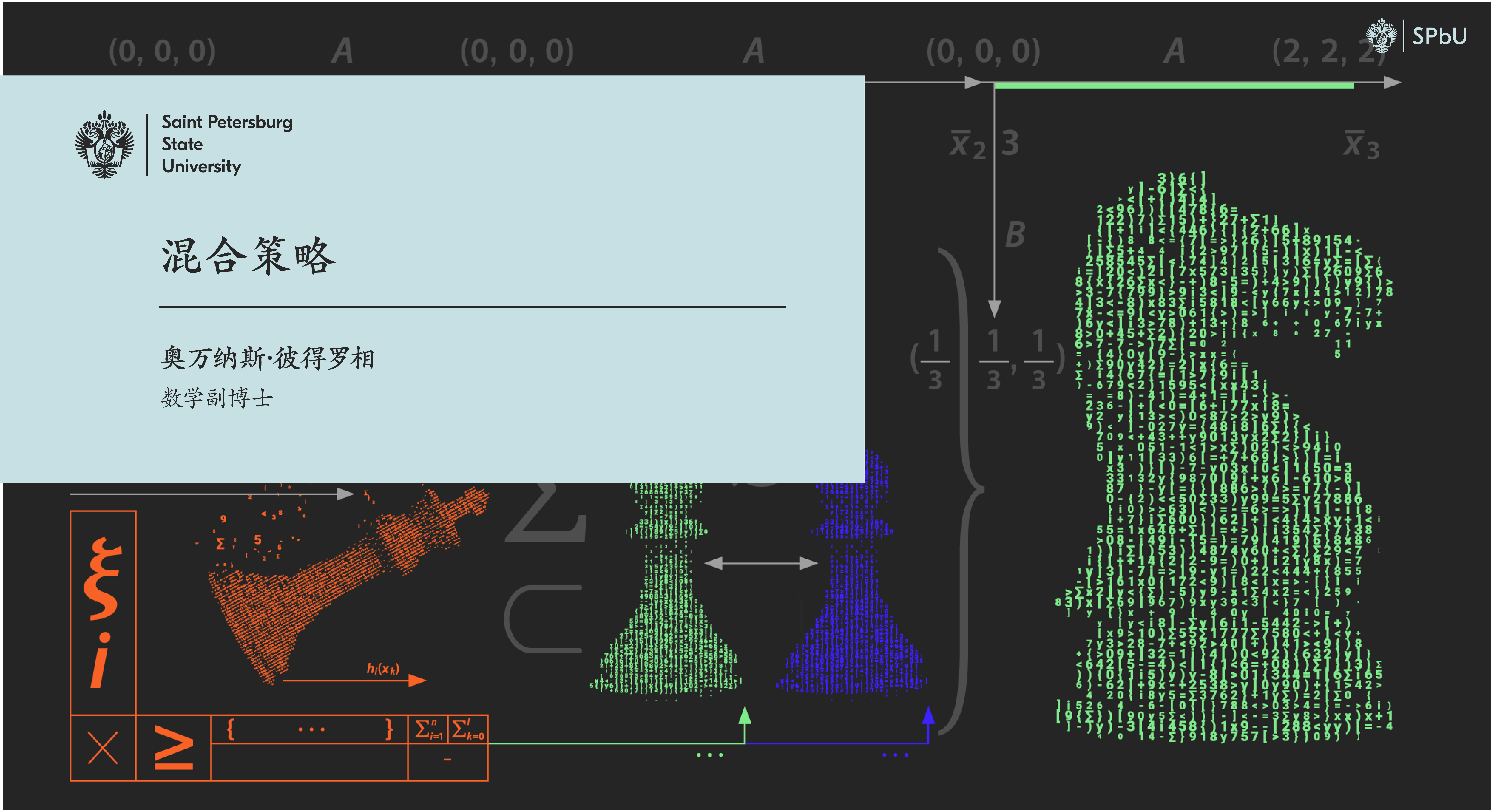
Saint Petersburg
State
University

www.spbu.ru

Saint Petersburg
State
University

混合策略

奥万纳斯·彼得罗相
数学副博士



混合策略

布鲁多上校应当如何避免泄露自己的策略信息?

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & -1 \\
-2 & 2 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

混合策略

定义:
取值为局中人的策略的随机变量称为混合策略。

局中人 1 和局中人 2 的混合策略具有如下形式:

$$x = (\xi_0, \dots, \xi_m),\ \sum_{j=0}^{m} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i = 0, \dots, m.$$

$$y = (\eta_0, \dots, \eta_n),\ \sum_{j=0}^{n} \eta_j = 1,\ \eta_j \geq 0,\ j = 0, \dots, n.$$

其中 ξ_i 和 $\eta_j \geq 0$ – 分别是在局中人1 和局中人2 选择纯策略i 和j 时的概率。X, Y 表示混合策略的集合。

混合策略

定义:
取值为局中人的策略的随机变量称为混合策略。

布鲁多上校博弈
令 $x = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$, $y = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{array} &
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & -1 \\
-2 & 2 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

混合策略

令 $x = (0.7, 0, 0, 0, 0.3)$.

布鲁多上校的这一策略将如何实施?

$x = (0.7, 0, 0, 0, 0.3)$

随机数字表

0.83	0.48	0.88	0.81	0.37	0.09	0.56	0.88	0.29	0.37
0.26	0.43	0.65	0.08	0.97	0.26	0.28	0.53	0.61	0.42
0.41	0.63	0.84	0.04	0.42	0.61	0.05	0.50	0.67	0.75
0.45	0.53	0.33	0.19	0.10	0.39	0.53	0.04	0.24	0.79
0.22	0.98	0.54	0.77	0.04	0.55	0.76	0.13	0.32	0.46
0.15	0.42	0.86	0.35	0.24	0.83	0.85	0.36	0.49	0.11

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京: 科学出版社.
2. 张维迎. (2004). 博弈论与信息经济学. 上海: 上海人民出版社.
3. 杨荣基, 彼得罗相, 李颂志. (2007). 动态合作——尖端博弈论. 北京: 中国市场出版社.
4. Fudenberg, D., Tirole, J. (2002). 博弈论. 北京: 中国人民大学出版社.
5. Peters, H. (2008). Game Theory. A Multi-Leveled Approach. Berlin: Springer-Verlag.
6. Mazalov, V. V. (2014). Mathematical game theory and applications. New York: Wiley.
7. Petrosyan, L. A., Zenkevich, N. A. (2016). Game theory. Singapore: World Scientific.

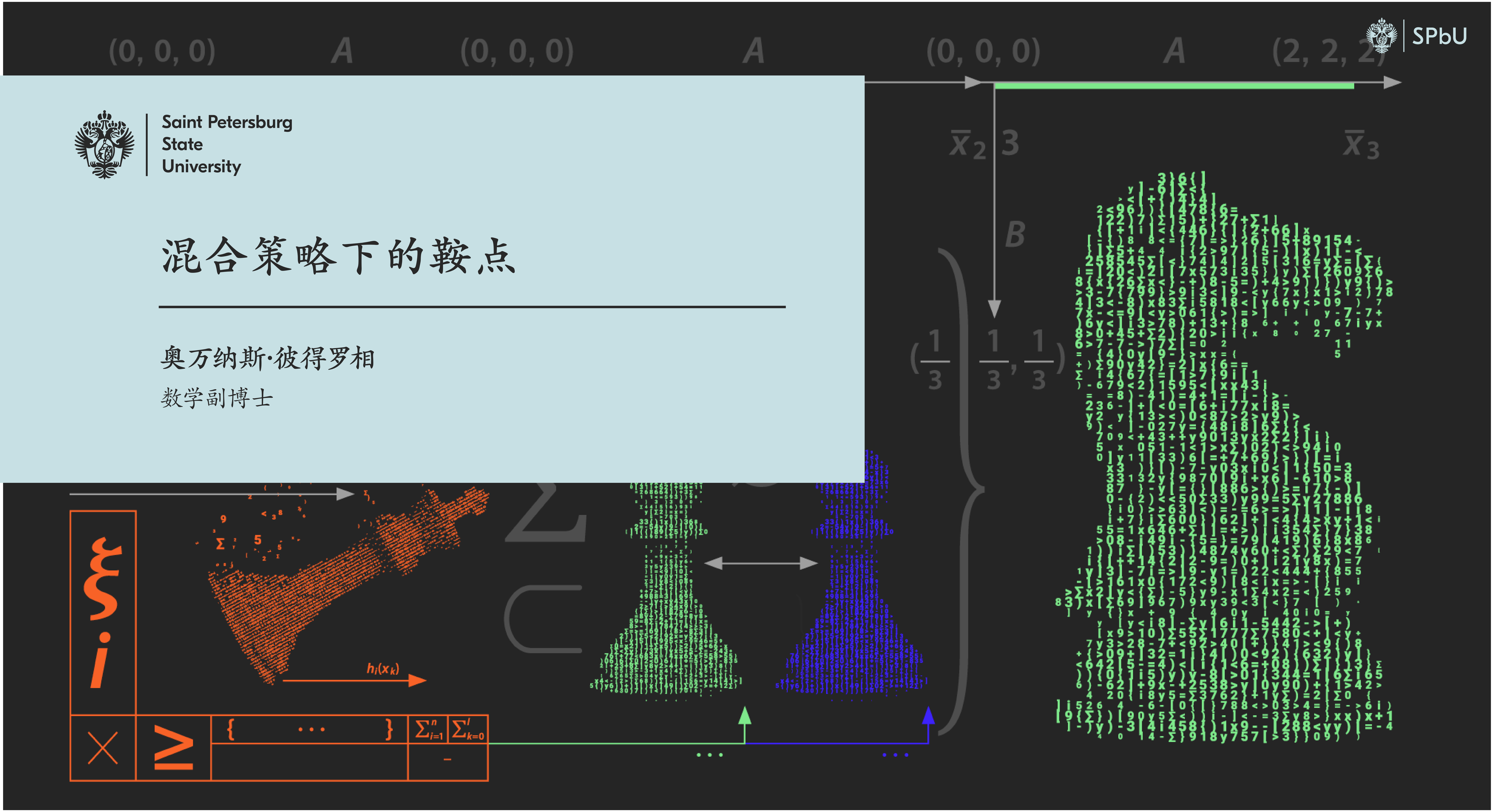
Saint Petersburg
State
University

www.spbu.ru

Saint Petersburg
State
University

混合策略下的鞍点

奥万纳斯·彼得罗相
数学副博士



混合策略下的支付

定义:
矩阵博弈 Γ_A 中局中人的混合策略二元组 (x, y) 称为混合策略下的局势。

定义:
混合策略 $x = (\xi_0, \ldots, \xi_m), y = (\eta_0, \ldots, \eta_n)$ 下的局势处支付 $K(x, y)$ 定义为数学期望:

$$K(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \xi_i a_{ij} \eta_j = (xA)y = x(Ay).$$

混合策略下的支付

令 $x = (0.7, 0, 0, 0, 0.3)$, $y = (0.1, 0.9, 0, 0)$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0.7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

局势 (x, y) 处的支付:

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{3} \xi_i a_{ij} \eta_j = 0.7(0.1 \cdot 4 + 0.9 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) +$$

$$+ 0(\ldots) + 0(\ldots) + 0(\ldots) + 0.3(0.1 \cdot 0 + 0.9 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4) = 1.81.$$

混合策略意义下的均衡局势

矩阵博弈基本定理
在混合策略意义下，任何矩阵博弈都存在均衡局势。

总存在混合策略下的局势 (x^*, y^*)，使得:

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*), \forall x \in X,$$
$$K(x^*, y) \ge K(x^*, y^*), \forall y \in Y.$$

同样也满足以下等式:

$$K(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y).$$

均衡局势下的支付被称为博弈值，表示为 v。

混合策略意义下的均衡局势

令 $x^* = \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{4}{9}\right)$, $y^* = \left(\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{48}{90}, \frac{3}{90}\right)$:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \frac{7}{90} & \frac{32}{90} & \frac{48}{90} & \frac{3}{90} \end{array} \\
\begin{array}{c} \frac{4}{9} \\ 0 \\ \frac{1}{9} \\ 0 \\ \frac{4}{9} \end{array} &
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & -1 \\
-2 & 2 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

对 (x^*, y^*) 满足:

$$K(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \frac{14}{9}.$$

因此, (x^*, y^*) – 是博弈 Γ_A的均衡局势。

最优策略及博弈值的性质

定理:
混合策略下的局势 (x^*, y^*) 在博弈 Γ_A 中是均衡局势的充分必要条件是成立等式:

$$\min_{y_j \in Y} K(x^*, y_j) = \max_{x_i \in X} K(x_i, y^*).$$

例

令 $x = (\xi, 1-\xi)$, $y = (\eta, 1-\eta)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \eta & 1-\eta \end{array} \\ \begin{array}{c} \xi \\ 1-\xi \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$K(x_1, y^*) = 6\eta^* + 5(1-\eta^*)$ $\qquad \eta^* + 5 = 7 - 4\eta^*$

$K(x_2, y^*) = 3\eta^* + 7(1-\eta^*)$ $\qquad \eta^* = 0.4$

$K(x_1, y^*) = K(x_2, y^*)$ $\qquad y^* = (\eta^*, 1-\eta^*) = (0.4, 0.6)$

$K(x^*, y_1) = 6\xi^* + 3(1-\xi^*)$ $\qquad 3\xi^* + 3 = 7 - 2\xi^*$

$K(x^*, y_2) = 5\xi^* + 7(1-\xi^*)$ $\qquad \xi^* = 0.8$

$K(x^*, y_1) = K(x^*, y_2)$ $\qquad x^* = (\xi^*, 1-\xi^*) = (0.8, 0.2)$

$$K(x^*, y^*) = 5.4$$

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京: 科学出版社.
2. 张维迎. (2004). 博弈论与信息经济学. 上海: 上海人民出版社.
3. 杨荣基, 彼得罗相, 李颂志. (2007). 动态合作—尖端博弈论. 北京: 中国市场出版社.
4. Fudenberg, D. & Tirole, J. (2000). Game Theory. Cambridge: MIT-press.
5. Peters, H. (2008). Game Theory. A Multi-Leveled Approach. Berlin: Springer-Verlag.
6. Mazalov, V. V. (2014). Mathematical game theory and applications. New York: Wiley.
7. Petrosyan, L. A., Zenkevich, N. A. (2016). Game theory. Singapore: World Scientific.
8. Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1970). Theory of games and economic behavior. Princeton: University Press.

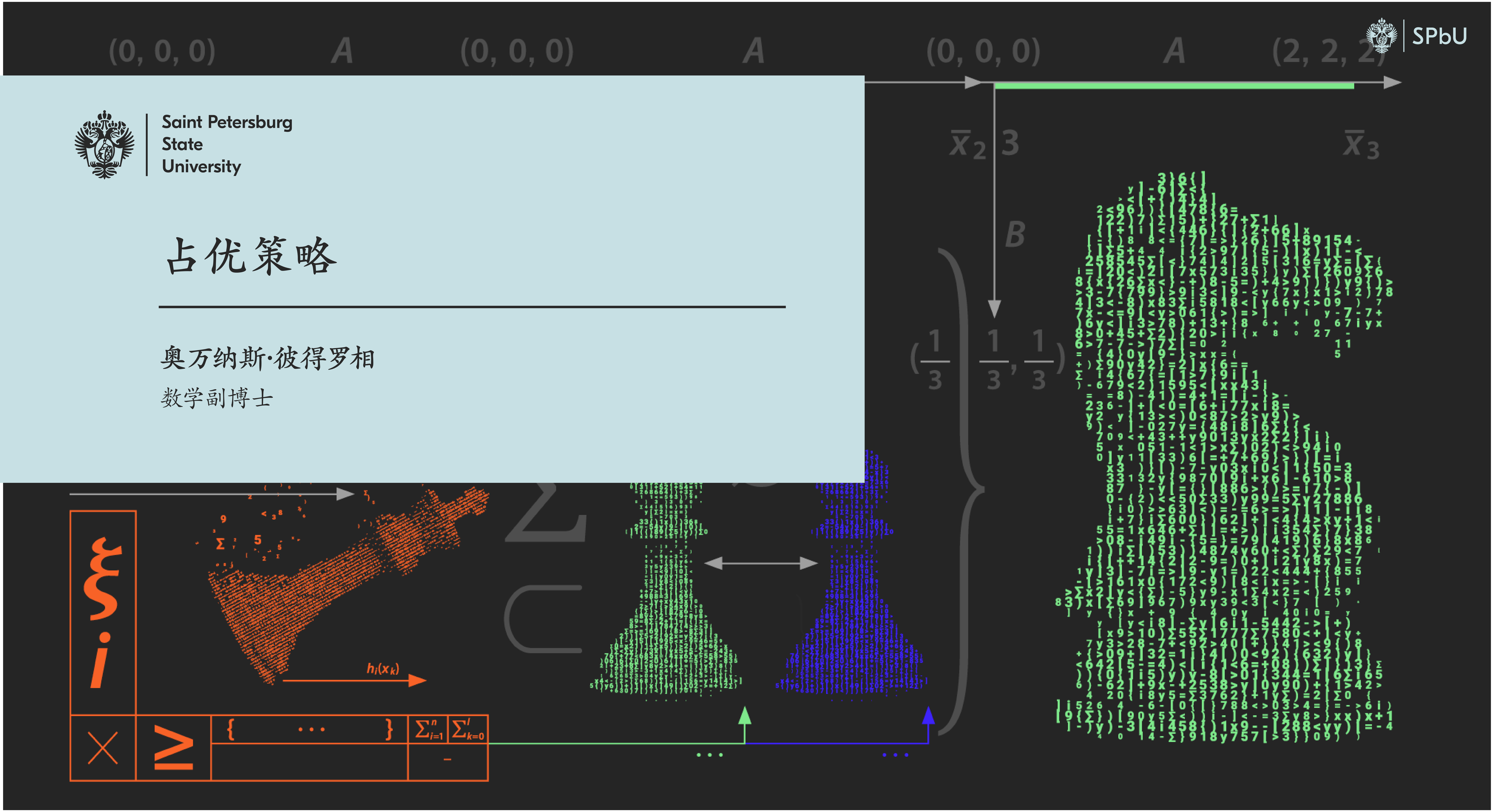
Saint Petersburg
State
University

www.spbu.ru

Saint Petersburg
State
University

占优策略

奥万纳斯·彼得罗相
数学副博士



策略的优超

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

如何找到该博弈的均衡局势?

策略的优超

定义:
局中人1 (2) 的策略 x' (y') 称为优超于策略 x'' (y''), 如果以下不等式成立:

$$x'a^j \geq x''a^j, \forall j \in \{0, \dots, n\}$$
$$(a_i y' \leq a_i y'', \forall i \in \{0, \dots, m\}).$$

定义:
局中人1 (2) 的策略 x'' (y'') 称为被占优, 如果存在这个局中人
的策略 $x' \neq x''$ ($y' \neq y''$) 优超于 x'' (y'')。

局中人1 (2) 的策略 x'' (y'') 称为严格被占优, 如果存在该局中人的策略
x' (y') 使得上述不等式严格成立。

策略的优超

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{array} &
\begin{pmatrix}
4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\
0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 策略 $x_6, x_7, x_5, x_7, x_4, x_7, x_5, x_4, y_4, y_6$ 分别对应优超于策略 $x_0, x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, y_0, y_8$。
- 因此，策略 $x_0, x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, y_0, y_8$ 是被占优的。

策略的优超

定理:
局中人的一个策略 x' 优超于它的一个最优策略 x^*，那么策略 x' 也是最优的*。

定理:
如果一个局中人的策略 x^* 是最优的，那么策略 x^* 不是严格被占优的。

* – 最优策略是均衡局势下的策略。

策略的优超

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\
0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

策略 $x_0, x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, y_0, y_8$ 并不是均衡局势下的策略。

策略的优超

设矩阵 A' 是由矩阵 A 删掉第 i 行所得。

令 $\overline{x}_i^*$ 表示策略 x^* 在第 i 位置的扩充。

定理:
假设矩阵 A 的第 i 行被占优，那么

- $v_A = v_{A'}$.
- 在博弈 $\Gamma_{A'}$ 中，局中人2 的任意最优策略 y^* 在博弈 Γ_A中也是最优的。
- 如果 x^* 是局中人1 在博弈 $\Gamma_{A'}$ 中的任意最优策略，那么 $\overline{x}_i^*$ 是该局中人在博弈 Γ_A中的最优策略。

策略的优超

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\
0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

该博弈中的最优策略为
$x^* = y^* = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, 0)$,
博弈值为 $v = \frac{3}{2}$。

策略的优超

$$
\begin{array}{c}
\\
x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

博弈的最优策略:

$x^* = (0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}),$

$y^* = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, 0).$

策略的优超

设矩阵 A' 是由矩阵 A 删掉第 j 列所得。令 $\overline{y_j^*}$ 表示策略 y^*在第 j 位置的扩充。

定理:
在博弈 Γ_A中, 假设矩阵 A 的第 j 列被占优, 那么

- $v_A = v_{A'}$.
- 在博弈 $\Gamma_{A'}$ 中, 局中人1 的任意最优策略 x^* 在博弈 Γ_A中也是最优的。
- 如果 y^* 是局中人2 在博弈 $\Gamma_{A'}$ 中的任意最优策略, 那么 $\overline{y_j^*}$ 是该局中人在博弈 Γ_A中的最优策略。

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京: 科学出版社.
2. 张维迎. (2004). 博弈论与信息经济学. 上海: 上海人民出版社.
3. 杨荣基, 彼得罗相, 李颂志. (2007). 动态合作—尖端博弈论. 北京: 中国市场出版社.
4. Vorob'ov, N. N. (1994). Foundations of Game Theory: Noncooperative Games. Basel: Birkhäuser.
5. Peters, H. (2008). Game Theory. A Multi-Leveled Approach. Berlin: Springer-Verlag.
6. Straffin, Ph. D. (1993). Game Theory and Strategy. Washington: MAA notes.
7. Petrosyan, L. A., Zenkevich, N. A. (2016). Game theory. Singapore: World Scientific.
8. Mazalov, V. V. (2014). Mathematical game theory and applications. New York: Wiley.

Saint Petersburg
State
University
www.spbu.ru

SPbU

Saint Petersburg
State
University

占优策略

奥万纳斯·彼得罗相

数学副博士

策略的优超

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 策略 $y_4, y_4, y_5, y_7, y_6, y_5, y_6, y_7$ 分别对应优超于策略 $y_0, y_1, y_2, y_3, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}$.
- 因此策略 $y_0, y_1, y_2, y_3, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}$ 被占优的。

策略的优超

策略 x_5 优超于 x_4:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

策略的优超

策略 y_6 优超于 y_4:

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

策略的优超

策略 $y = (0, 1/2, 1/2)$ 优超于 y_5:

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} y_6 & y_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

策略的优超

策略 $x = (0, 1/2, 1/2)$ 优超于 x_5:

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ x_6 \\ x_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

最优策略为 $x^* = y^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, 博弈值为 $v = \frac{3}{2}$.

布鲁多上校博弈

设 $m = 3, n = 1$. $x_i = (m - i, i), y_j = (n - j, j)$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_0 & y_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_0 & y_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

最优策略为 $x^* = y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 博弈值为 $v = 2$.

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京: 科学出版社.

2. Straffin, Ph. D. (1993). Game Theory and Strategy. Washington: MAA notes.

3. Petrosyan, L. A., Zenkevich, N. A. (2016). Game theory.
Singapore: World Scientific.

4. Mazalov, V. V. (2014). Mathematical game theory and applications.
New York: Wiley.

5. Vorob'ov, N. N. (1994). Foundations of Game Theory: Noncooperative Games.
Basel: Birkhäuser.

6. Peters, H. (2008). Game Theory. A Multi-Leveled Approach.
Berlin: Springer-Verlag.

Saint Petersburg
State
University

www.spbu.ru

Saint Petersburg
State
University

矩阵博弈的迭代求解方法

奥万纳斯·彼得罗相

数学副博士

迭代法

Brown-Robinson 迭代法是一种迭代过程，用于构造收敛于矩阵博弈解的博弈值序列 ($\underline{v}^k$)

- 在每次迭代中，局中人1 和2 都使用纯策略。
- 在当前迭代中，局中人选择纯策略基于其累计支付。

迭代法

算法:

- **迭代 0**:
  x_{i_0}, y_{i_0} 是任意的初始纯策略
- **迭代 1**:
  $x_{i_1}\colon \max\limits_i a_{i,j_0} = \overline{v}^1;\ \ y_{i_1}\colon \min\limits_j a_{i_0,j} = \underline{v}^1.$
  …
- **迭代** $k+1$:
  $x_{i_{k+1}}\colon \max\limits_i \sum_j \frac{a_{i,j_k}\eta_j^k}{k} = \overline{v}^k;\ y_{j_{k+1}}\colon \min\limits_j \sum_i \frac{a_{i_k,j}\xi_i^k}{k} = \underline{v}^k,$
  此时 ξ_i^k 和 η_j^k 是局中人的纯策略 x_i, y_j 在迭代 k 处被选择的数量。

算法由以下定义: $\varepsilon = \max\limits_k \overline{v}^k - \min\limits_k \underline{v}^k$.

迭代法

$x^k = (\xi_1^k / k, \ldots, \xi_m^k / k)$, 和 $y^k = (\eta_1^k / k, \ldots, \eta_n^k / k)$ 是纯策略被选择的频率。

博弈值:

$$v \in \left[\max_k \frac{\overline{v}^k}{k}, \min_k \frac{\underline{v}^k}{k}\right].$$

定理:(算法的收敛性)

$$\lim_{k \to +\infty}\left(\min_k \frac{\underline{v}^k}{k}\right) = \lim_{k \to +\infty}\left(\max_k \frac{\overline{v}^k}{k}\right) = v.$$

布鲁多上校博弈

利用迭代法求解布鲁多上校博弈:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & -1 \\
-2 & 2 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

布鲁多上校博弈

№	Выбор 1 игрока	Выбор 2 игрока	Выигрыш игрока 1					Выигрыш игрока 2					vk (с чертой снизу)	vk (с чертой сверху)
			x0	x1	x2	x3	x4	y0	y1	y2	y3			
1	x0	y2	4	1	-2	-1	0	4	2	1	0		0,00	4,00
2	x0	y3	4	0	-4	0	4	8	4	2	0		0,00	2,00
3	x4	y3	4	-1	-2	1	8	8	5	4	4		1,33	2,67
4	x4	y3	4	-2	-4	2	12	8	6	6	8		1,50	3,00
5	x4	y2	5	-2	-2	5	16	8	7	8	12		1,40	3,20
6	x4	y1	7	1	0	5	17	8	8	10	16		1,33	2,83
7	x4	y1	9	4	2	5	17	8	9	12	20		1,14	2,43
8	x4	y0	13	5	0	4	17	8	10	14	24		1,00	2,13
9	x4	y0	17	6	-2	3	17	8	11	16	28		0,89	1,89
10	x4	y0	21	7	-2	2	17	8	12	18	32		0,80	2,10
11	x0	y0	25	8	-4	1	17	12	14	19	32		1,09	2,27
12	x0	y0	29	9	-6	0	17	16	16	20	32		1,33	2,42
789	x0	y0	1234	1033	1208	1052	1228	1184	1202	1243	1348		1,50	1,56
790	x0	y0	1238	1034	1206	1051	1228	1188	1204	1244	1348		1,50	1,57
791	x0	y0	1242	1035	1204	1050	1228	1192	1206	1245	1348		1,51	1,57
792	x0	y0	1246	1036	1202	1049	1228	1196	1208	1246	1348		1,51	1,57
793	x0	y0	1250	1037	1200	1048	1228	1200	1210	1247	1348		1,51	1,58
794	x0	y0	1254	1038	1198	1047	1228	1204	1212	1248	1348		1,52	1,58
795	x0	y0	1258	1039	1196	1046	1228	1208	1214	1249	1348		1,52	1,58
796	x0	y0	1262	1040	1194	1045	1228	1212	1216	1250	1348		1,52	1,59
797	x0	y0	1266	1041	1192	1044	1228	1216	1218	1251	1348		1,53	1,59
798	x0	y0	1270	1042	1190	1043	1228	1220	1220	1252	1348		1,53	1,59
799	x0	y1	1272	1045	1192	1043	1229	1224	1222	1253	1348		1,53	1,59
800	x0	y1	1274	1048	1194	1043	1230	1228	1224	1254	1348		1,53	1,59

布鲁多上校博弈

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & -1 \\
-2 & 2 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

迭代至 №800 时的结果:

- $x^{800} = (0.433, 0, 0.098, 0, 0.470)$, $y^{800} = (0.073, 0.429, 0.443, 0.056)$.
- $v^{800} = 1.555675$.
- $[1.53, 1.59]$.

其他解决矩阵博弈的方法

- 图形分析法 (对 $[2 \times n]$, $[m \times 2]$ 博弈) 。
- 转换为线性规划问题的方法。

参考文献

1. 高红伟. (2009). 动态合作博弈. 北京: 科学出版社.

2. Petrosyan, L. A., Zenkevich, N. A. (2016). Game theory.
   Singapore: World Scientific.

3. Vorob'ov, N. N. (1994). Foundations of Game Theory: Noncooperative Games.
   Basel: Birkhäuser.

Saint Petersburg
State
University

www.spbu.ru