传染病的传染问题

本文建立了传染病的传染的三个微分方程模型，模型由简单到复杂，层次分明。

主 要 内 容

模型1：
每个病人在单位时间内传染的人数为常数

模型2：总人数为常数n

模型3：人员划分成三类

进一步的思考

本世纪初，瘟疫还经常在世界的某些地区流行，被传染的人数与哪些因素有关?如何预报传染病高潮的到来？为什么同一地区一种传染病每次流行时，被传染的人数大致不变?科学家们通过建立传染病传播的模型，比较圆满的回答了这些问题。

传染病的传播涉及因素很多，不可能通过一次简单的假设就能建立起完善的数学模型，这里的方法是，先做出最简单的假设，看看会得到什么结果，然后针对不合理或不完善处，逐步修改和增加假设，得到比较满意的模型。

模型1

模型1

假设：

(1) 每个病人在单位时间内传染的人数为常数。

(2) 一人得病后，经久不愈，人在传染期内不会死亡。

记时刻t的得病认数为 $i(t)$，开始时有 i_0 个传染病人，则在 Δt 时间内增加的病人数为：

$$i(t+\Delta t)-i(t)=k_0 i(t)\Delta t$$

于是得：

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt}=k_0 i(t) \\ i(0)=i_0 \end{cases} \qquad (1)$$

其解为：

$$i(t) = i_0 e^{k_0 t}$$

这个结果表明，病人人数将按指数规律无限增加，当 $t \to \infty$ 时，$i(t) \to \infty$，显然与事实不符。事实上，一个地区的总人数大致可视为常数（不考虑传染病传播时期出生和迁移的人数），在传染病传播时期，一个病人单位时间能传染的人数 k_0 则是在改变的。在初期，k_0 较大，随着病人的增多，健康者减少，被传染的机会也会减少，于是，就会变小。所以应该对模型进行修改。

模型2

模型2

记时刻t的健康人数为 $s(t)$，当总人数不变时，k_0 应随 $s(t)$ 的减少而变小。

假设：

(1) 总人数为常数n，且 $i(t)+s(t)=n$ (1)

(2) 单位时间内一个病人能传染的人数与当时健康者人数成正比,比例系数为k（传染强度）。

(3) 同模型1的假设(2)。据假设(2)，方程(1)中的 k_0 应变为 $ks(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = ks(t)i(t) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \qquad (2)$$

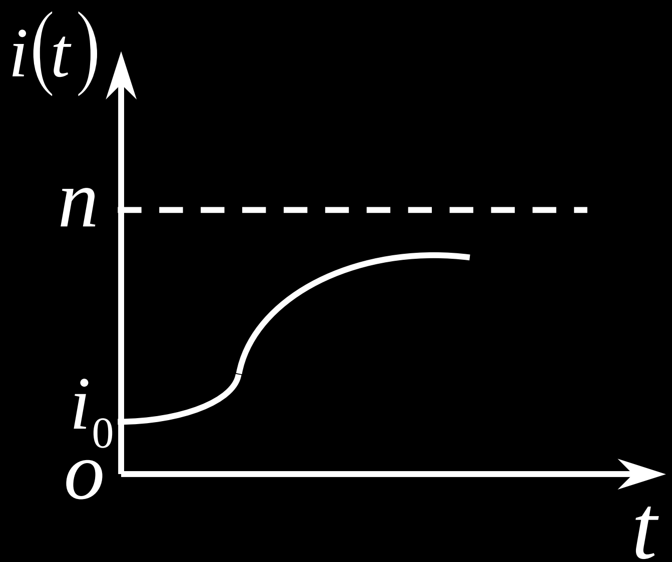
将(1)式代入上式得：

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = ki(n-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

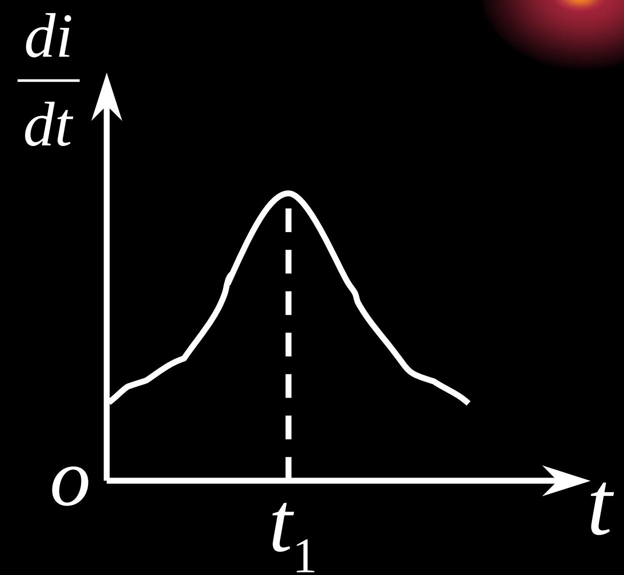
其解为：

$$i(t) = \frac{n}{1+\left(\dfrac{n}{t_0}-1\right)e^{-ntk}} \qquad (3)$$

$i(t)\sim t$曲线见图(1)，这个模型可用来预报传染病较快的疾病前期传染病高峰到来的时间，医学上称 $\frac{di}{dt}\sim t$ 为传染病曲线；它反映了传染病人的变化率与时间的关系，如图(2)所示。



图(1)



图(2)

由(3)式可得：

$$\frac{di}{dt}=\frac{kn^2\left(\frac{n}{i_0}-1\right)e^{-ntk}}{\left[1+\left(\frac{n}{i_0}-1\right)e^{-ntk}\right]^2}$$

令 $\frac{d^2i}{dt^2}=0$，得极大值点为： $t_1=\frac{\ln\left(\frac{n}{i_0}-1\right)}{kn}$

由此可见,当传染强度k或n增加时，t_1将变小，即传染病高峰来得快，这与实际情况吻合。此处的k可由经验和统计数据估计。但由(3)式，当$t \to \infty$时，$i(t) \to \infty$这意味着最终人人都将被传染，显然这与实际不符，其原因是假设(3)不合理，应进一步改进。

模型3

模型3

我们将人员分成3类：第一类是传染者(i)类；第二类是易受传染者(s)类；第三类是排除在外者(r)类。第一类是由能够把疾病传给别人的那些人组成的；第二类是由并非传染者但能够成为传染者的那些人组成的；第三类包括患病死去的人，痊愈后具有长期免疫力的人以及在痊愈并出现长期免疫力以前被隔离起来的人。令$i(t), s(t)$和$r(t)$分别表示在时刻t的第一、第二、第三类的人数。

假设：

(1) 总人数为常数n，则 $i(t)+s(t)+r(t)=n$ (1)

(2) 同模型2的假设(2)；

(3) 单位时间内病愈免疫的人数与当时的病人人数成正比，比例系数为 l（恢复系数）。

由假设(3)，有：
$$\frac{dr}{dt}=li(t) \qquad (2)$$

由于引入了 $r(t)$，则模型2的方程（2）式应改为：

$$\frac{di}{dt}=ks(t)i(t)-\frac{dr}{dt} \qquad (3)$$

上式表示单位时间内病人人数的增加应等于被传染的人数减去病愈的人数。 从(1)—(3)式中消去 di，并设 $r(0)=0, s(0)=s_0$，得：

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}=-ks(t)i(t) \\ \dfrac{dr}{dt}=li(t) \\ r(0)=0, s(0)=s_0 \\ i(t)+s(t)+r(t)=n \end{cases} \qquad (4)$$

为求其解，记 $\rho=\dfrac{l}{k}$，称为特征指标，对同一地区传染病，ρ是常数。由方程(4)可得：

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{\rho}s(t)\frac{dr}{dt}$$

其解为：

$$s(t)=s_0e^{-\frac{1}{\rho}r(t)}\approx s_0\left[1-\frac{1}{\rho}r(t)+\frac{1}{2\rho^2}r^2(t)\right]$$

于是 $$\frac{dr}{dt}=li(t)=l[n-r(t)-s(t)]$$

$$\approx l\left[(n-s_0)+\left(\frac{s_0}{\rho}-1\right)r(t)-\frac{s_0}{2\rho^2}r^2(t)\right]$$

再解上式得：

$$r(t)=\frac{1}{2c}\left[b-qth\left(-\frac{q}{2}t+c'\right)\right] \qquad (5)$$

其中：

$$a=l(n-s_0),b=l\left(\frac{s_0}{\rho}-1\right),c=\frac{ls_0}{2\rho^2}$$

$$q=\sqrt{b^2+4ac},thc'=\frac{b}{q}$$

注意到 $n-s_0=i(0)$，故当 $i(0)$ 很小时

$$4ac=l^2\frac{2s_0}{\rho^2}i(0)<<l^2\left(\frac{s_0}{\rho}-1\right)^2$$

所以：$q\approx b$

又因：$\lim\limits_{t\to\infty}th\left(-\frac{q}{2}t+c'\right)=-1,$

所以：

$$\lim_{t\to\infty}r(t)=\frac{1}{2c}(b+q)\approx\frac{b}{c}=\frac{2\rho^2}{s_0}\left(\frac{s_0}{\rho}-1\right) \qquad (6)$$

上式表明，当S_0很小$(\le \rho)$时，根本传染不开；只有S_0很大时才存在传染问题。

今设$s_0=\rho+\gamma(\ \gamma\ge 0$, 只有这时才有传染问题), 且 $\gamma<<\rho$,则：

$$\lim_{t\to\infty} r(t)\approx \frac{2\rho^2}{\rho+\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\rho}\approx 2\gamma \qquad (7)$$

因$\lim\limits_{t\to\infty} r(t)$表示最终免疫人数，也即最终痊愈人数。显然，这也是传染病传染的人数，于是由式(7)可知：

(1) 对于同一地区，同一传染病所传染的人数大体上是个常数 2γ，这个结果与统计结果一致。

(2) 当恢复系数 l 变大时，传染强度 k 变小时，$\rho=\dfrac{l}{k}$ 变大，相应 γ 变小，从而传染病承认的人数 2γ 也就减小。

(3) 由于 S_0 可视为总人数，所以传染病承认人数是 ρ 以上人数 γ 的两倍.

进一步的思考

　　传染病的传播涉及因素很多，不可能通过一次简单的假设就能建立起完善的数学模型，这里的方法是，先做出最简单的假设，看看会得到什么结果，然后针对不合理或不完善处，逐步修改和增加假设，得到比较满意的模型。

学会这种建模思想，并应用到建模中去。