边缘分布律及边缘密度

教学设计与制作：胥斌

引例

体形 (X,Y) 　　　　高考成绩(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)

⇩ 　　　　⇩

身高X？ 体重Y？ 　　　　数学X_1? 语文X_2?

已知$(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1},X_n)$的联合分布

⇩

求取 X_i 的分布

1. 边缘分布律

已知离散型(X,Y)的联合分布律$\{p_{ij}\}$，则有

$$P(X=a_i)=P(X=a_i,Y<+\infty)$$

$$=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记作}}{=}p_{i\cdot},\qquad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=b_j)=P(X<+\infty,Y=b_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记作}}{=}p_{\cdot j},\qquad j=1,2,\cdots$$

边缘分布律

以二维表的形式给出

$X \backslash Y$ (p_{ij})	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	X
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
Y	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	

例1 设甲、乙两人各进行两次射击，他们每次的命中率分别为0.8和0.6。甲先射击，且甲全部命中时乙的命中率下降10%，甲全部未命中时乙的命中率上升20%，甲命中1次时乙不受影响。令X，Y分别表示甲、乙的命中次数，分别求(X,Y)关于X，Y的边缘分布律。

关于X的边缘分布律

(X,Y)的联合分布律

逐行求和

p_{ij} Y / X	0	1	2	X
0	$0.04\cdot0.0784$	$0.04\cdot0.4032$	$0.04\cdot0.5184$	0.04
1	$0.32\cdot0.16$	$0.32\cdot0.48$	$0.32\cdot0.36$	0.32
2	$0.64\cdot0.2116$	$0.64\cdot0.4968$	$0.64\cdot0.2916$	0.64
Y	0.18976	0.48768	0.32256	

逐列求和

关于Y的边缘分布律

2. 边缘密度函数

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$

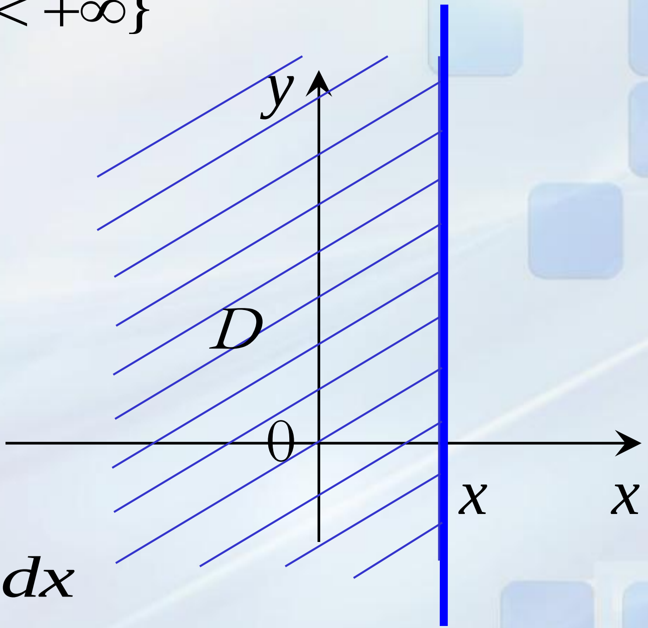
$$F_X(x)=P\{X\le x\}\quad =P\{X\le x,Y<+\infty\}$$

$$=\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

关于X的
边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$



同理，$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

例2 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{y}, & x>0, y>x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求(X,Y)关于X,Y的边缘密度。

暂时固定

先求 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

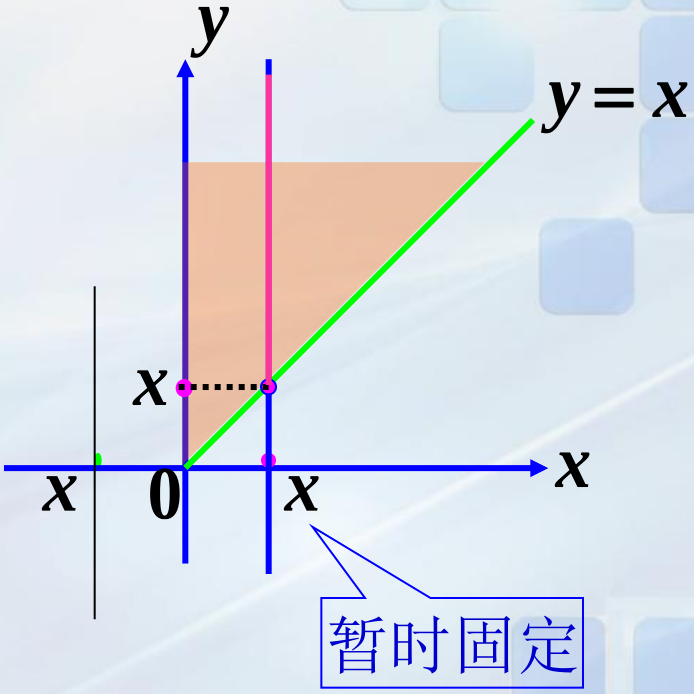
当 $x\le 0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy=0$

当 $x>0$ 时，

$$f_X(x)=\int_{x}^{+\infty} e^{-y}\,dy$$

$$=e^{-y}\Big|_{+\infty}^{x}=e^{-x}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

暂时固定

当 $y\le 0$ 时， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx=0$

当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_0^{y} e^{-y}\,dx \;= ye^{-y}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$