概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

1929

CHONGQING UNIVERSITY

Chapter 1

参数估计

1.1 矩估计法

1.1.1 总体矩与样本矩

[总体矩] 称 $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_X(x)$ 为总体 X 的 k 阶矩，$k = 1, 2, \cdots$

总体矩一般是参数的函数，比如

$$X \sim \Gamma(1, \lambda) \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$X \sim U[a, b] \Longrightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$$

[样本矩] 称 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 为总体 X 的 k 阶样本矩，$k = 1, 2, \cdots$

从大数定律可知，如果 $E(|X^k|) < +\infty$，则

$$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

有鉴于此，$K.Pearson$ 1894 年提出样本矩替换总体矩，世人称为矩法估计。

例 1.1.1. 试用矩法估计指数分布的参数 λ。

解：由于总体 $X \sim \Gamma(1,\lambda)$，由矩法估计

$$E(X) = A_1$$

有

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{X}$$

求解

$$\lambda = \frac{1}{\bar{X}}$$

这就得到指数分布的参数 λ 的一个估计量 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$。

例 1.1.2. 设总体 X 有密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad \theta > -1$$

求参数 θ 的矩估计。

解：由总体 X 的分布

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} \end{aligned}$$

由矩估计法，建立方程

$$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1-\bar{X}} - 2$$

例 1.1.3. 求均匀分布 $X \sim U(a,b)$ 中参数的矩估计。

解：由矩法估计，联立方程组

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = A_2 \end{cases}$$

为了方便，我们也常常作二阶矩方程的等价变形

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = A_2 - \bar{X}^2 = M_2^*$$

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = A_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ D(X) = M_2^* \end{cases}$$

代入参数

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ D(X) = M_2^* \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X} \\ \frac{(b-a)^2}{12} = M_2^* \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \bar{X} - \sqrt{3M_2^*} \\ b = \bar{X} + \sqrt{3M_2^*} \end{cases}$$

所以矩估计量为

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3M_2^*}\,,\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3M_2^*}$$

1.1.2 矩估计的优缺点

优点
- ① 方便，直观，简洁，明快
- ② 对$E(X), D(X)$作估计时，无需知道总体的分布类型

缺点
- ① 当总体的矩不存在时，矩法失效
- ② 矩估计是建立在大数定律上的，n 要求充分大
- ③ 仅用矩来进行统计推断，没有充分利用总体分布的信息

④ 矩估计结论不唯一

例 1.1.4. 设总体 $X \sim P(\lambda)$，求参数的矩法估计

解：由 $\bar{X}$ 建立方程

$$E(X) = \lambda = \bar{X} \Longrightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

由 M_2^* 建立方程

$$D(X) = \lambda = M_2^* \Longrightarrow \hat{\lambda} = M_2^*$$

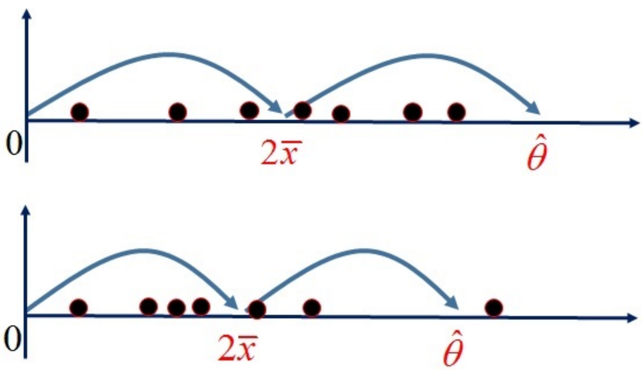
⑤ 矩估计结果可能不合理

例 1.1.5. 设总体 $X \sim U[0,\theta]$，求参数 θ 的矩估计。

解：由矩法估计，建立方程

$$E(X)=\frac{\theta}{a}=\bar{X}$$

$$\hat{\theta}=2\bar{X}$$



动画流程是：
1.上图坐标和红点出现；
2.出现2X，从左至右依次动画出现两个箭头；
3.出现红theta。
4. 上图中除坐标轴外，全部淡出。

5. 在原坐标轴上，下图的红点出现；
6.出现2X，从左至右依次动画出现两个箭头；
7.出现红theta；
8.突出显示最后一个红点。

1.1.3 矩估计的优缺点

优点
- ① 方便，直观，简洁，明快
- ② 对$E(X), D(X)$作估计时，无需知道总体的分布类型

缺点
- ① 当总体的矩不存在时，矩法失效
- ② 矩估计是建立在大数定律上的，n 要求充分大
- ③ 仅用矩来进行统计推断，没有充分利用总体分布的信息
- ④ 矩估计结论不唯一
- ⑤ 矩估计结果可能不合理