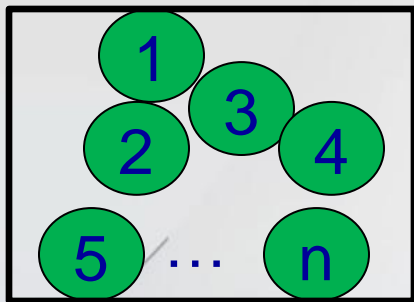


几何概率

教学设计与制作：胥斌





E_1



E_2

放宽样本点有限，保留样本点等可能出现

古典概型

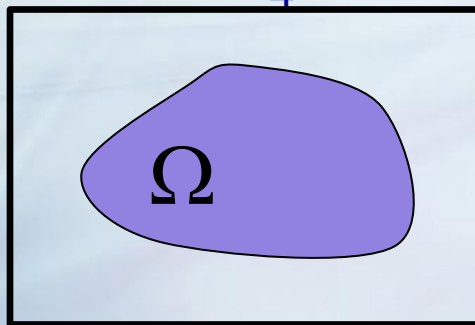


几何概型

E_3

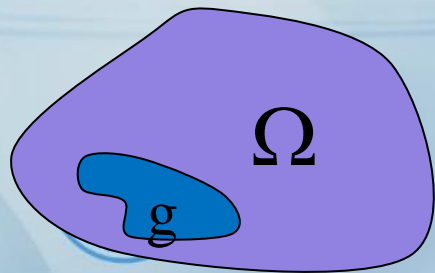


E_4



E_3 、 E_4 中，事件“指针指向点A”、“取到区域 Ω 上点A”失去了意义，我们转而关心“指针指向某段边缘”和“投针落在位于 Ω 中的某子区域g上”这样的事件。

几何概率直观定义：随意向一个有一定大小的区域 Ω 内投点，如果投在 Ω 内各个点上的可能性相等，那所投的点恰好落在 Ω 内的一个子区域g上的概率为



$$P(\text{“点落在g内”}) = \frac{g \text{ 的几何大小}}{\Omega \text{ 的几何大小}}$$

几何大小：长度、面积、体积等几何测度

例1 设儿子每周六都选择在12点到13点间打电话回家，而母亲12点起都等候在电话机旁，求事件A：“母亲等待时间不超过15分钟”的概率。

解 儿子打电话相当于往12点到13点间投点

该点落在12:00~12:15上，A发生，则



$$P(A) = \frac{A \text{ 的 (时间) 测度}}{\Omega \text{ 的 (时间) 测度}} = \frac{15 \text{ 分钟}}{60 \text{ 分钟}} = \frac{1}{4}$$



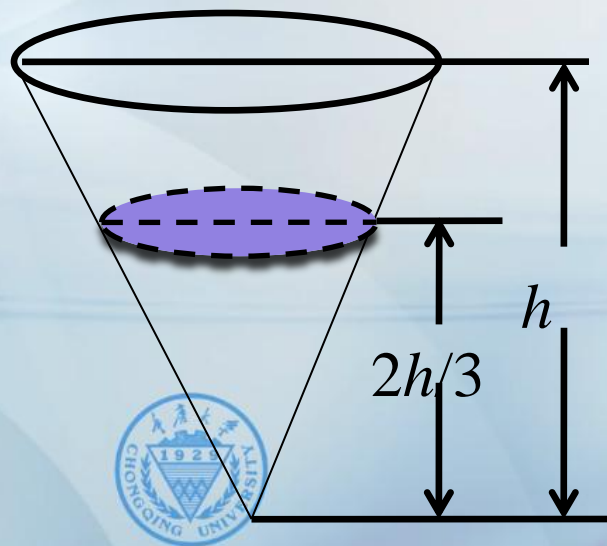
例2 圆锥形容器盛满水，其中落入一个细菌，该细菌停留在容器内的任何位置是等可能的。若将水倒出一部分进行检查，剩余水的水面高为容器高的 $2/3$ 。求能查到这个细菌的概率。

解 细菌落入容器中相当于向容器内投点

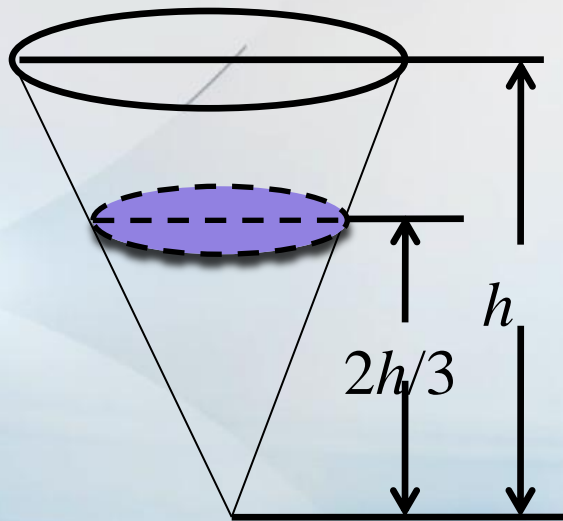
“任何位置” \longrightarrow 等可能

“容器内” \longrightarrow Ω 区域

几何概型



若细菌(该点)处于“倒出的水”中，则细菌能被查到



设容器口半径为 r ，高为 h ，易得
容器容积(Ω 测度)

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

余水的体积

$$V_{\text{余水}} = \frac{8}{27} V$$

倒出水体积

$$V_{\text{出水}} = \frac{19}{27} V$$

则 $P(\text{"能查到这个细菌"}) = \frac{V_{\text{出水}}}{V} = \frac{19}{27}$



例3 将长为 L 的棒任折成三段，求三段能构成三角形的概率。

解 将棒任意折成三段，相当于向棒任意投两个点（折断点），这两点都等可能地在 $[0, L]$ 上取得，该试验属于几何概型。



折断点将棒分成 X, Y 和 $L-X-Y$ 三段

X ：在 $[0, L]$ 上取值，约束条件 $0 < X < L$

Y ：在 $[0, L]$ 上取值，约束条件 $0 < Y < L$

$L-X-Y$ ：由 X, Y 决定，约束条件 $0 < L-X-Y < L$

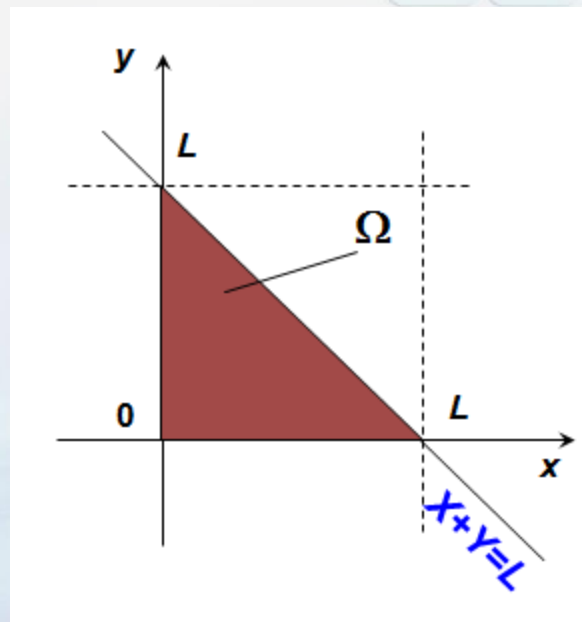


确定 (X, Y) 的取值范围，即样本空间 Ω

$$\Omega = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} 0 < X < L \\ 0 < Y < L \\ 0 < L - X - Y < L \end{array} \right. \right\}$$



$$\Omega = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} 0 < X < L \\ 0 < Y < L \\ 0 < X + Y < L \end{array} \right. \right\}$$

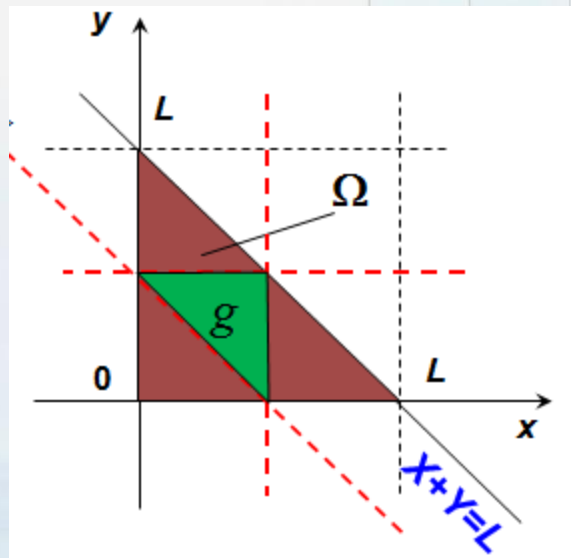


确定能构成三角形的取值范围，即有利场合 g

$$g = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} (X, Y) \in \Omega \\ L - X - Y + Y > X \\ L - X - Y + X > Y \\ L - X - Y - X < Y \end{array} \right. \right\}$$



$$g = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} (X, Y) \in \Omega \\ X < L/2 \\ Y < L/2 \\ X + Y > L/2 \end{array} \right. \right\}$$



$$P(\text{“能构成三角形”}) = \frac{S_g}{S_\Omega} = \frac{1}{4}$$

小结

- 几何概率定义
- 几何概型中事件概率的求解

