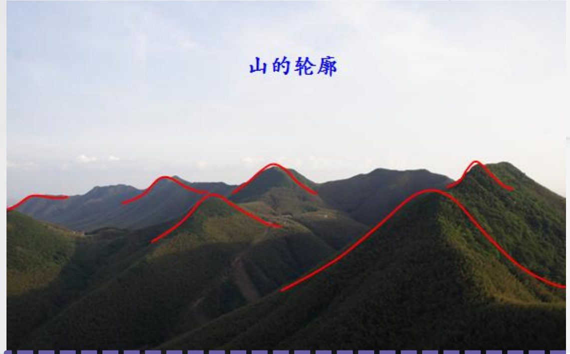
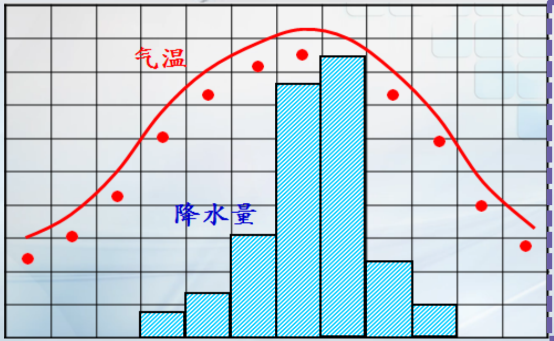
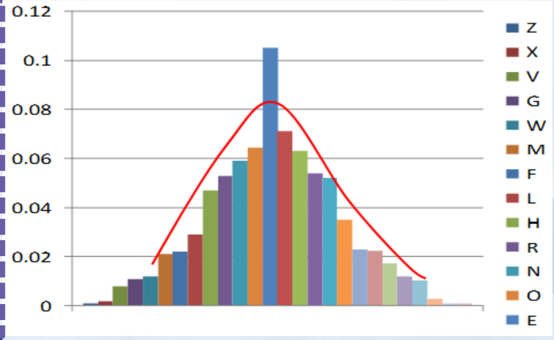
中心极限定理

教学设计与制作：胥斌

正态场景







为什么无处不在?

引例一 炮弹落点误差问题

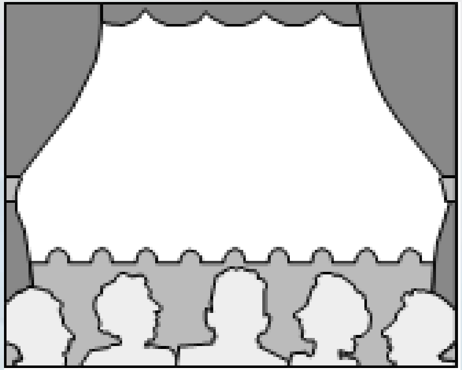
炮弹落点误差是怎么构成的?

$$Y_n \left\{ \begin{array}{ll} \text{士兵瞄准误差} & X_1 \\ \text{空气阻力误差} & X_2 \\ \text{炮弹质量误差} & X_3 \\ \text{炮身结构误差} & X_4 \\ \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

重要的是随机因素的**总影响**

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

引例二 电影院扩建



老电影院

UME

调查：人口总数1600，4/5的可能

要求： $P\{\text{空座} \geq 200\} \leq 0.1$

? m 个座位

建模

设X_i为第 i 个看电影的人，$i=1,2,\ldots,1600$

令：
$$X_i=\begin{cases}1\,, & 去UME\\ 0\,, & 不去UME\end{cases}$$

要解出m，需要知道Y_{1600}服从的分布

则去UME的总人数为：

$$Y_{1600}=X_1+X_2+\cdots+X_{1600}$$

故问题提炼为：

$$\boxed{P\{\underline{m-}(X_1+X_2+\cdots+X_{1600})\ge 200\}\le 0.1}$$

问题的提出

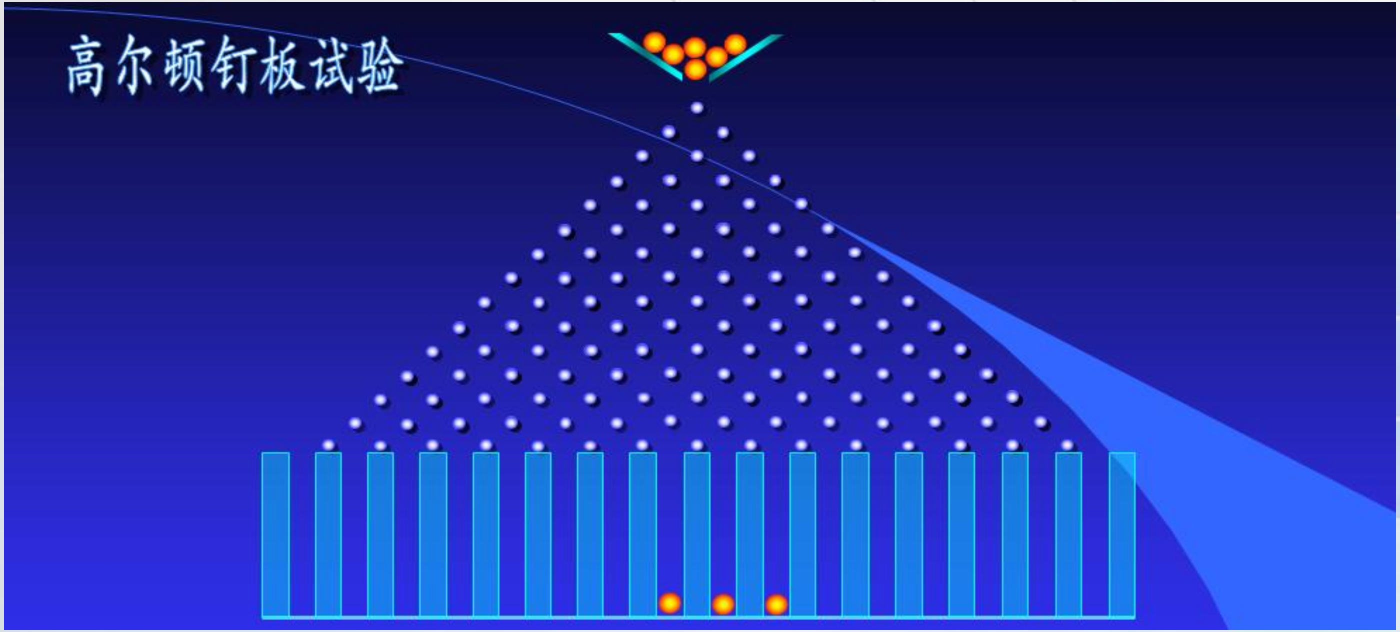
$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

问题： $Y_n \xrightarrow{n \to +\infty}$ 会服从什么分布呢?

试验启示

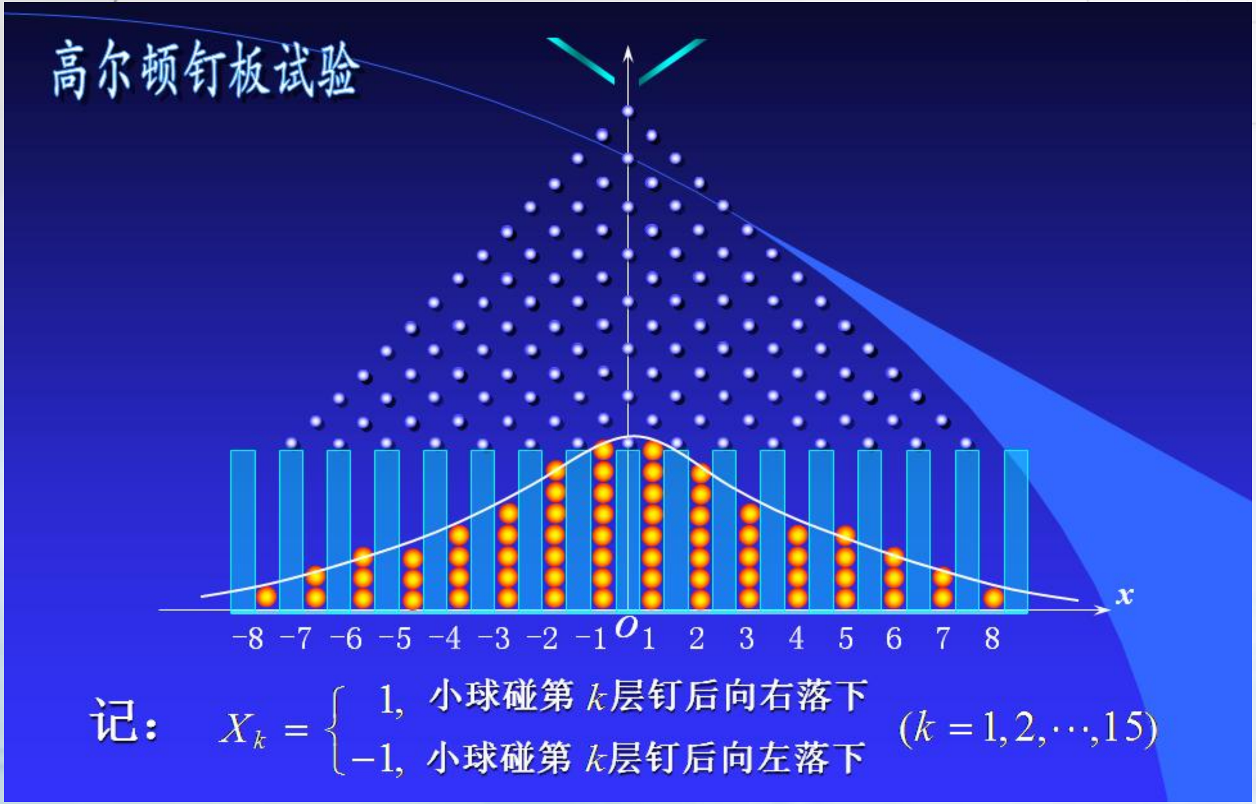
高尔顿（Galton）钉板试验

试验开始



试验过程： 如图所示，白色的点代表光滑铁钉（共15层），顶上漏斗装满黄色小球，依次漏下，经过每层钉子时，小球均与一颗铁钉相碰，然后以二分之一的概率向左或向右平移一个位置，最后落入底部柱状小槽中。

思考： 最后小球在各小槽的分布情况?



试验结果

小球的高度揭示了小球落入小槽的“强度”，该强度曲线近似于一条**正态密度曲线**.

小球的总位移 $Y_{15} = \sum_{k=1}^{15} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

高尔顿钉板试验的**启示**:

多个独立同分布于两点分布的随机变量的和近似服从正态分布.

定理1 德莫佛—拉普拉斯中心极限定理（De Moivre-Laplace）

设$X_1,X_2,\ldots,X_n\ldots$独立同分布于 0-1分布，$E(X_i)=\mu$ ，$D(X_i)=\sigma^2$,则当 $n\to+\infty$ 时

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

回到引例二

到电影院的实际人数:

$$Y_{1600} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1600}$$

因：$\begin{cases} E(X_i) = \mu = 0.8 \\ D(X_i) = \sigma^2 = 0.16 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $Y_{1600} \overset{\text{近似}}{\sim} N(1280, 256)$

由：$P\{m - Y_{1600} \geq 200\} \leq 0.1$

$\Rightarrow$ $m = 1460$(座)

中心极限定理推广

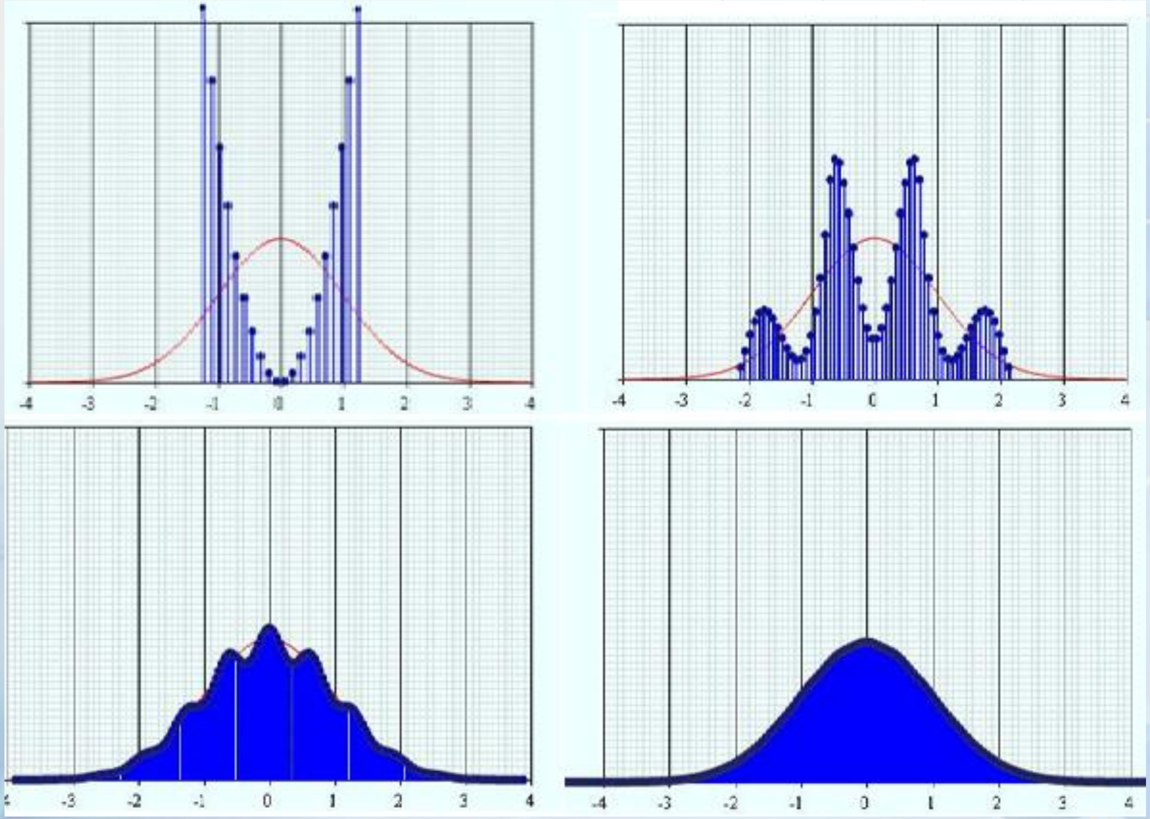
若$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$独立同分布，但不是0-1分布时，

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

试验演示 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为U形分布时，$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布

Y_1的分布　　Y_3的分布

Y_{10}的分布　　Y_{20}的分布



定理2　独立同分布的中心极限定理

设$X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$独立同分布，$E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma^2$

则当 $n \to +\infty$时

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

定理3 李雅普诺夫(Lyapunov)定理

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$为相互独立的随机变量，且$X_i$的期望和方差都存在，则当$n \to +\infty$时，有：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i), \sum_{i=1}^{n} D(X_i)\right)$$

小结

- 独立同分布于0-1分布的随机变量之和近似服从正态分布

- 独立同分布的随机变量之和近似服从正态分布

- 独立的随机变量之和近似服从正态分布