最优捕鱼策略

……………利用微分、差分方程建立数学模型

重庆大学数理学院　　李传东

主 要 内 容

1、微分、差分方程（组）的建模实例

2、最优捕鱼策略

微分、差分方程建模的简单实例

1　Newton冷却(加热)定律

将温度为T的物体放入处于常温m的介质中,

则T的变化率正比于物体温度T与周围介质温度 m的差.

即:

$$dT/dt = k(T - m),$$

化为差分方程模型为:

$$T_{n+1} = T_n - k(T_n - m)$$

思考?

1. 公安人员侦破凶杀案，如何快速地估算出死者的

死亡时间, 此时0.0081.

2.把读数为$25^{\circ}C$的温度计放到室外，20分钟后，读

数为$28.2^{\circ}C$，再过20分钟后读数为$30.32^{\circ}C$，试推算

一下室外温度是多少。

2　有关动物群体的常微分方程模型

关于这一类的问题非常多，如人口问题，生态与动植物保护问题，合理开发问题，种群之间的竞争排斥问题等等。

思路:

离散问题连续化

2.1 人口模型

假设t时刻人口数为p(t),单位时间的出生率c减去死亡率s为a=c-d, 则人口模型为：

$$\frac{dp}{dt} = (a - bp)p$$

$$p(t_0) = p_0$$

其中b为正常数。

Well-Known Logistic Map

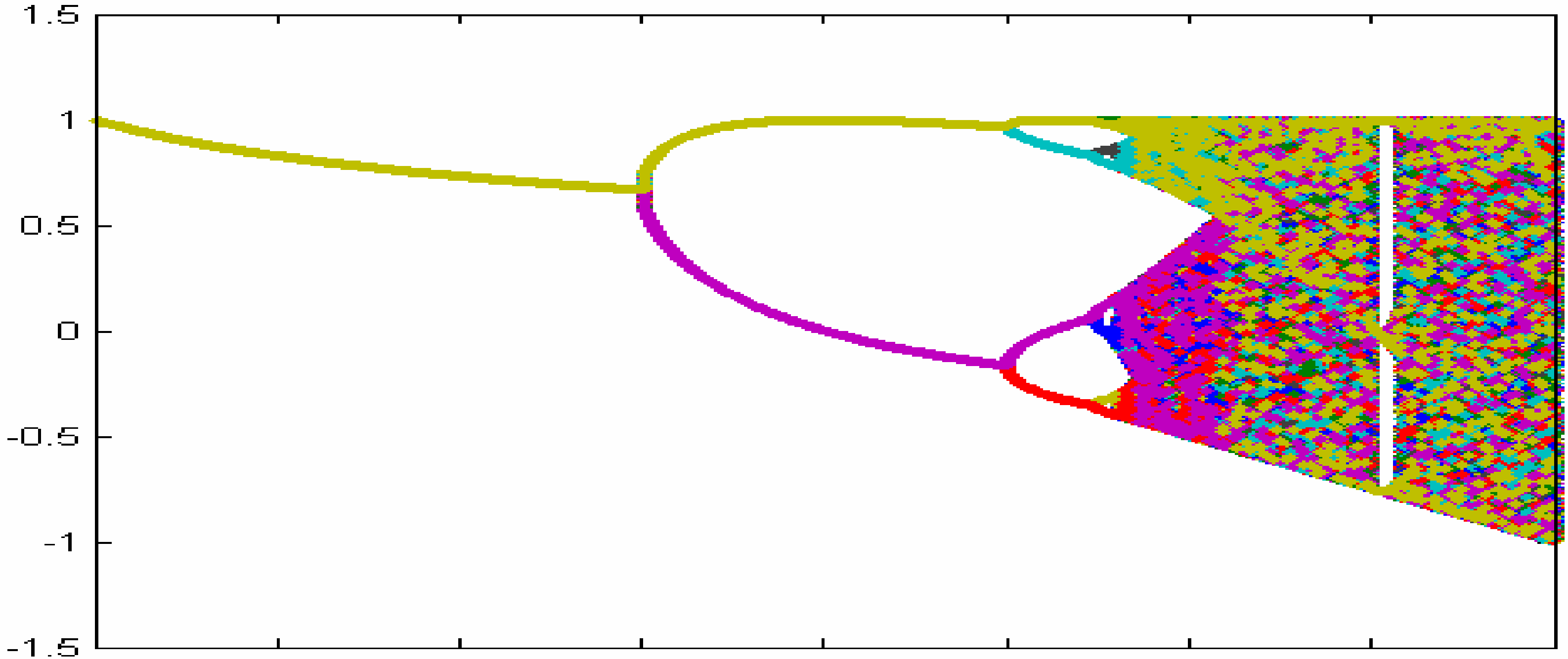
$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^{\ 2}$$

适当地重新定义一下变量和参量， 可以将上式写成其他的等价形式。例如，

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$$

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^{\ 2}$$

丰富的动力学行为



Logistic map 的 分叉图

2.2 单种群的合理开发模型

养鱼场从渔池捞鱼出售,每次捕捞太少不合算,一方面,销售收入少,另一方面,池中鱼太多也不利于鱼的生长繁殖,但每次捞得过多,“竭泽而渔”,显然不可取. 应怎样控制捕捞率,使得总经济效益最优?

假设单位时间内捕捞h条鱼,t时刻池中鱼数为N(t).

则N(t)满足下列数学模型:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN}{K}(K-N) - h$$

其中K是鱼池鱼数的最大值,h称为收获率.

当 $\frac{dN}{dt}=0$时, $\frac{rN}{K}(K-N)-h=0$, (1)

从而知道 $h \le rK/4$.

$h > rK/4$ 时, $dN/dt < 0$,

鱼池的鱼数单调减少,长此下去,将无鱼可捞.

所以

$$h=rK/4$$

是最大可承受的产量.

$h < rK/4$时,

方程(1)有两个平衡点N1,N2

$$N1=(K - \ K^2 \ \mathbf{-4Kh/r}\ )\ \mathbf{2}\ ,\ N2=(K + \ K^2 \ \mathbf{-4Kh/r}\ )\ \mathbf{2}$$

此时模型写成

$$dN/dt = - r(N - N1)(N - N2)/K$$

于是当$N < N_1$时,$dN/dt < 0$;

当$N_1 < N < N_2$ 时,$dN/dt > 0$;

当$N > N_2$时,$dN/dt < 0$

可见,$N=N_2$是稳定的.

又由N_1的表达式知,h越小,N_1越小,所以要用小收获率h开发低密度的种群,反之亦然.故收获率与种群密度有关.

3 抵押贷款买房

一对青年夫妇为买房要用银行贷款60000元,月利率为0.01,

贷款期限为25年=300月.假设这对夫妇每月可节余900元,问

是否可以去买房?

解:

设每月要还x元,A_k表示第k个月时尚欠的款数,

月利率R=0.01 , 则

$$A_{k+1}=(1+R)A_k - x$$

$$A_0 = 60000$$

$$A_{300} = 0$$

1996年全国大学生数学建模竞赛试题分析

A题　最优捕鱼策略

问题：

为了保护人类赖以生存的自然环境,可再生资源(如渔

业、林业）的开发必须适度。一种合理、简化的策略是，

在实现可持续收获的前提下，追求最大产量或最佳效益。

考虑对某种鱼（鳀鱼）的最佳捕捞策略：

鳀鱼

体长十余厘米，银灰色，侧扁，生活在海中。

亦称“黑背鳀”。幼鱼干制品称“海蜒”。

$1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} + n)$.

假设这种鱼分4个年龄组，称1龄鱼 ，…，4龄鱼 。各年龄组每条鱼的平均重量分别为5.07,11.55,17.86,22.99(克)，各年龄组鱼的自然死亡率均为0.8(1/年),这种鱼为季节性集中龄鱼繁殖，其中每条4龄鱼 的产卵量为1.109×10^5（个)，3龄鱼的产卵量为这个数的一半,2龄鱼和1龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后4个月,卵腐化并成活为1龄鱼,成活率(1龄鱼条数与产卵总量n之比)为

渔业部门规定：

每年只允许在产卵腐化期前大8个月内惊醒捕捞作业.如果每年投入的捕捞能力(如渔船数、下网次数等)固定不变，这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比，比例系数不妨称为捕捞强度系数。通常使用13㎜网眼的拉网，这种网只能捕捞3龄鱼 和4龄鱼，其两个捕捞系数之比为0.42:1。渔业上称这种方式为固定努力量捕捞

1) 建立数学模型分析如何实现可持续捕获(即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群条数不变)，并且在此前提下得到最高的年收获量(捕捞总重量)

2) 某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务5年，合同要求5年后鱼群的不能受到生产能力太大破坏。已知承包时各年龄组鱼群数量分别为：

$$122,\ 29.7,\ 10.1,\ 3.29\ \ (\times 10^9\ 条)，$$

如果仍用固定努力量的捕捞方式，该公司应采取怎样的策略才能使总收获量最高？

对该问题的几点说明

原问题实质上是明确或隐含地给出了各年龄组鱼群的转化规律，并给出了它们的自然死亡率及产卵的时间分布，并固定每年投入的捕捞能力及3、4龄鱼捕捞能力的比值，要求选择一定的捕捞能力系数，使得各年龄组鱼量在各年开始捕捞前条数不变，或5年后鱼群的生产能力不会有太大的破坏，并在此条件下，得到以重量计的最大捕获量。

必须首先明确以下三个概念的含义：

1。捕捞强度系数。如果用数学语言来表达就是：只考虑捕捞对种群变化的影响，则在[t,t+Δt]这段时间内鱼类种群由捕捞产生的变化量为

$$N(t) – N(t+ \Delta t)$$

单位时间的捕捞量是；

$$[N(t) – N(t+ \Delta t)]/ \Delta t.$$

当它与鱼群的大小成正比时应该有关系：

$$[N(t) - N(t+\Delta t)]/\Delta t = qN(t)$$

这个关系应该对任何时间间隔Δt都成立。于是，令$\Delta t \to 0$就

得到方程 $dN/dt=-qN$,

捕捞系数应该理解为满足这个关系的量q。如果直接把它理

解为捕捞的百分率是不恰当的。

2。“季节性集中繁殖”。

题目中说产卵孵化期是每年的最后四个月，而且是集中繁殖，那末假设时间服从均匀分布是不合适的(这时鱼类个体每1.2分钟产一个卵)。在不失生物学的真实的前提下，使模型分析尽量简单的假设应该是假设：

鱼群的个体在后四个月的第一天集中一次产卵。

3。“自然死亡率(1/年)“。

注意：这是一个有量纲的量，它既不是简单的百分率又不是简单的变化速率。实际上它是百分比率的变化率。它应该理解为以每年死亡80%的速率减少，并不是在一年内恰好死亡80%。

另外，题目中没有说明四龄以上的鱼如何处理。我们可以假设这种鱼只活到四龄，以后它就死掉了。也可以假设四龄以后的鱼仍然活着。这对模型没有太大的差别，只是后者的分析计算稍复杂，计算结果也只是稍有差别

说明：

对问题的正确理解，在建模中是至关重要的，

它直接地影响到所建模型是否正确地反映实际情况。

摘 要

本问题是典型的可再生资源开发问题,因此我们以成熟的Scheafer模型为基础求解.在建模过程中,我们对各年龄组鱼在一年的数量变化规律应用微分方程进行分析,建立捕捞期和产卵期各组鱼群的数量随时间变化的指数型方程.此后我们又对各组鱼群之间的数量关系建立按年份变化的离散型方程.最终获得既简单又比较精确的离散型迭代方程组.

在模型求解过程中,我们结合计算机分析求解的技术,应用Mathematical软件和Wtcom C/C++编辑器,通过编程求出了问题的解,并以作图的方式给出了模型的直观表示.

我们....得出如下结论:(略)

所涉及的知识：

微分方程

差分方程

该模型讨论的主要内容

问题的分析
模型的假设与符号说明
模型的建立
模型的求解
模型结果及检验
模型的评价及应用
对鱼的捕捞的进一步讨论

一.问题的分析

说明你对该问题的总体思路,及其对关键概念及术语的理解.(略)

二. 模型的假设与符号说明

a.　模型的假设

(一)　关于鱼的分类

1. 鱼分为1,2,3,4龄鱼;

2. 4龄鱼存活一年后仍为4龄鱼.

(二) 关于鱼的生长过程

1. 3,4龄鱼在一年的后4个月集中产卵,且在该4个月的 开始时刻进行;
2. 各年龄组鱼的自然死亡率为0.8/年,且死亡是一个连续过程,不时在某一时刻的突发;
3. 3龄鱼产卵量为$0.5\times1.109\times10^5$个/条,4龄鱼产卵量为1.109×10^5个/条;
4. 卵孵化成活率为$1.22\times10^{11}/(1.22\times10^{11}+n)$.

(三)　关于鱼的捕捞

1. 捕捞在产卵前8个月进行,且捕捞是一连续过程,不是在某一时刻发生

2. 捕捞强度系数固定,只能捕捞3,4龄鱼,它们的捕捞强度系数之比为0.42:1;

(四) 关于经济效益

经济效益以捕捞总量来衡量

b.符号说明(见下页)

参数	定　义	值域	单位
T	年份	0,1,2...	年
t	时间	R^+	年
Δt	间隔时间	[0,1]	年
N_i	i龄鱼数量	R^+	条
r	自然死亡率	0.8	1/年
n	年产卵数量	R^+	个
E_3	3龄鱼捕捞强度系数	R^+	1/年
E_4	4龄鱼捕捞强度系数	R^+	1/年
α_3	3龄鱼年产卵量	$0.5\times1.109\times10^5$	个/条
α_4	4龄鱼年产卵量	1.109×10^5	个/条
β	为计算方便而引入	R^+	条

三. 模型的建立

考察1,2龄鱼的生长过程,可得到

$$dN_i/dt = -rN_i, \qquad i=1,2$$

得$N_i(t)=N_0 \cdot e^{-rt}$

T年的i龄鱼在T+1年变为i+1龄鱼,所以

$$N_{i+1}(T+1)=e^{-r} \cdot N_i(T)$$

考察3,4龄鱼的生长过程,在前八个月,由于捕捞与存活均起作用,因而微分方程为:

$dN_i/dt = -(r+E_i) \cdot N_i \qquad i=3,4$

得$N_i(t)=N_0 \cdot e^{-(r+Ei)t}$,N_0为每年年初的i龄鱼总数,

由此可得,每时刻t的捕捞为$E_i \cdot N_i(t)$,则年捕捞量为

$$\int_0^{2/3} E_i N_i(t)dt = \frac{Ei}{Ei+r} N_0\left(1 - e^{-2/3(Ei+r)}\right) \quad (1)$$

在后四个月，只有存活率起作用，因而微分方程为

$$dN_i/dt=-rN_i$$

得到

$$N_i(t)=N_0\bullet e^{-rt} \qquad (2)$$

N_0为第八个月末时的i龄鱼总数。

计算得T年第八个月末i龄鱼数为

$$N_i(T)\bullet e^{-(r+E_i)\,2/3} \qquad (3)$$

T年末存活数

$$(N_i(T)\bullet e^{-(r+E_i)\,2/3})e^{-r/3}=e^{-r}\bullet N_i(T)\bullet e^{-E_i\,2/3}$$

根据以上的分析，我们可以整理得到鱼的生存过程满足以下公式：

$$
\begin{cases}
n(T+1)=\alpha_3 \cdot N_3(T) \cdot e^{-(r+E_3)2/3}+\alpha_4 \cdot N_4(T) \cdot e^{-(r+E4)2/3} \\
N_1(T+1)=\dfrac{1.22\times 10^{11}}{1.22\times 10^{11}+n(T+1)} \bullet n(T+1) \\
N_2(T+1)=e^{-r} \cdot N_1(T) \\
N_3(T+1)=e^{-r} \cdot N_2(T) \\
N_4(T+1)=N_3(T) \cdot e^{-(r+E_3 2/3)}+N_4(T) \cdot e^{-(r+E4 2/3)} \\
E_3=0.42 \cdot E_4
\end{cases}
\tag{4}
$$

其中$N_i(T) \cdot e^{-(r+E_3)2/3}$为捕捞结束后在产卵点出的第i种鱼数目。

四. 模型的求解

1. 在可持续捕捞情况下

Ni与T无关,可得以下方程组:

$$n=\alpha_3 \cdot N_3 \cdot e^{-(r+E_3)2/3}+\alpha_4 \cdot N_4 \cdot e^{-(r+E_4)2/3}$$

$$N_1=\frac{1.22\times10^{11}}{1.22\times10^{11}+n}\cdot n$$

$$N_2=e^{-r}\cdot N_1$$

$$N_3=e^{-r}\cdot N_2 \qquad (4)$$

$$N_4=N_3\cdot e^{-(r+E_3 2/3)}+N_4\cdot e^{-(r+E_4 2/3)}$$

$$E_3=0.42\cdot E_4$$

其中N_i为第i种鱼的平衡数量. 解得:

$$N_1=\frac{1.22\times10^{11}\cdot n}{1.22\times10^{11}+n}, \quad N_2=\frac{e\ \times 1.22\times10^{11}\cdot n}{1.22\times10^{11}+n},$$

$$N_3=\frac{e\ \times 1.22\times10^{11}\cdot n}{1.22\times10^{11}+n}, \quad N_4=\frac{1.22\times10^{11}\times n\times e^{-(2/3E_3+3r)}}{(1.22\times10^{11}+n)(1-e^{-(2/3\,E_4+r)})}.$$

而 $n=\dfrac{\beta\times n}{1.22\times10^{11}+n}$ 其中

$$\beta=\alpha_3\times1.22\times10^{11}\times e^{-(2E_3/3+3r/8)}+\alpha_4\times\frac{1.22\times10^{11}\times e^{-(2E_3+2E_4+11r)/3}}{1-e^{-(2E_4+3r)/3}}$$

结果讨论

由于 $n=\dfrac{\beta\times n}{1.22\times10^{11}+n}$ 所以当

$\beta > 1.22\times10^{11}$ 时,$n=\beta-1.22\times10^{11}$ 或 $n=0$.

$\beta < 1.22\times10^{11}$ 时,$n=0$.

事实上,当鱼群还未达到平衡状态时,由方程组(4)得到:

$$n(T+3)=\frac{\beta\times n(T)}{1.22\times10^{11}+n(T)}$$

于是

$$n(T+3)-n(T)=n(T)\frac{\beta-1.22\times10^{11}-n(T)}{1.22\times10^{11}+n(T)}$$

所以

当$\beta>1.22\times10^{11}$,$n(T)<\beta - 1.22\times\mathbf{10^{11}}$ 时, n关于T单调递增;

当$\beta>1.22\times10^{11}$,$n(T)>\beta - 1.22\times\mathbf{10^{11}}$ 时, n关于T单调递减,

这表明无论n(T)初值如何,最后必将趋于$\beta - 1.22\times\mathbf{10^{11}}$, 既达到(N_1 , N_2, N_3, N_4)平衡状态

当$\beta < 1.22 \times \mathbf{10}^{11}$ 时,n随T单调递减,说明无论n(T)初值如何,最终必趋于n=0,既无鱼状态.

总之, $n = \beta - 1.22 \times \mathbf{10}^{11}$ 为稳定解.

求E_3和E_4

利用(1)式得年捕捞量:

$$Weight(E4)=\max\ 17.86N_3\ \frac{E_3}{E_3+r}\left(1-e^{-2(E_3+r)/3}\right)$$

$$+22.99\ N_4\ \frac{E_4}{E_4+r}\left(1-e^{-2(E_4+r)/3}\right),0$$

求得最大鱼量为3.88707×10^{11}克,对应得 $E4=17.3629, E3=7.292$.此时的鱼群分布:

$N_1=1.19599\times10^{11}$ $N_2=5.37394\times10^{10}$

$N_3=2.41467\times10^{10}$ $N_4=8.39538\times10^{7}$

2. 对于渔业公司的五年计划

我们利用已得到的迭代方程(4),在已知各个年龄组鱼的初始值$(N_{10}, N_{20}, N_{30}, N_{40})'$的条件下,可迭代地求出第 i 年的鱼量分布$(N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}, N_{4i})'$关于$E_4$的函数其中$N_{ji}$为 j 龄鱼第 i 年的条数.

根据(1)式可求出5年的捕捞总量:

$$\mathrm{Weight}(E_4)=\left(\sum_{i=0}^{4} N_{3i}\right) 17.86\ \frac{\mathbf{E_3}}{\mathbf{E_3+r}}\left(1-e^{\mathbf{-2(E_3+r)/3}}\right)$$

$$+\left(\sum_{i=0}^{4} N_{4i}\right) 22.99\ \frac{\mathbf{E_4}}{\mathbf{E_4+r}}\left(1-e^{\mathbf{-2(E_4+r)/3}}\right)$$

编程计算得计算结果:

最大捕捞总量$Weight_{max}=1.6057\times10$ 克,对应地

$E_3=7.3836, E_4=17.58$

每年的捕鱼量分别为:

$W1=2.34401\times10^{11}$ 克，$W2=2.14852\times10^{11}$ 克

$W3=2.46276\times10^{11}$ 克，$W4=3.77825\times10^{11}$ 克

$W5=3.82216\times10^{11}$ 克 .

对鱼群生产能力破坏程度的分析：

在天然情况下鱼的生态系数总能趋于平衡,而对鱼的捕捞,使鱼的数量偏离平衡点.因而我们人为所谓的对鱼的生产能力的破坏实际上就是指,5年捕捞后鱼数量恢复所需的年数的分析.

首先我们求天然平衡点，在$E_4=0$(即不捕捞)的情况下，代入方程(4)得

$$N_1=1.21981\times10^{11},\quad N_2=5.48098\times10^{11}$$

$$N_3=2.46276\times10^{11},\quad N_4=2.00953\times10^{11}$$

此即为无捕捞时的平衡点。

在捕捞的情况下.

由方程组(4),知Ni(T)呈指数分布,故可认为当

Ni(T)≥0.7010Ni.

又鱼恢复的越快,说明对鱼的生产能力破坏的越小,因此

可以认为如果在5年捕捞后的4年(鱼的一个生产周期)内

恢复生产能力,那末捕捞就对生产能力没有太大的破坏.

编制程序并绘图来观察当经过5年捕捞及停止捕捞后鱼的数量的恢复过程.(略)

经过验证,停止捕捞两年鱼的生产能力就得到恢复,故认为没有破坏鱼的生产能力,这是一个可以接受的策略.

对鱼的捕捞的进一步讨论

(略)

五. 模型结果及检验

A.模型的结果

B.模型的检验

(略)

六. 模型的评价及应用

A.评价(优缺点)

B.推广应用

(略)

作业

1。 用Runge－Kutta法编程求解如下Rossler 方程

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 - \gamma x_3 + \beta$$

其中

$$\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \gamma = 5.7$$

2。 仔细分析前面的实例，总结竞赛论文的一般格式，

并编程验证前面得到的结果