概率论与数理统计

主讲教师：荣腾中

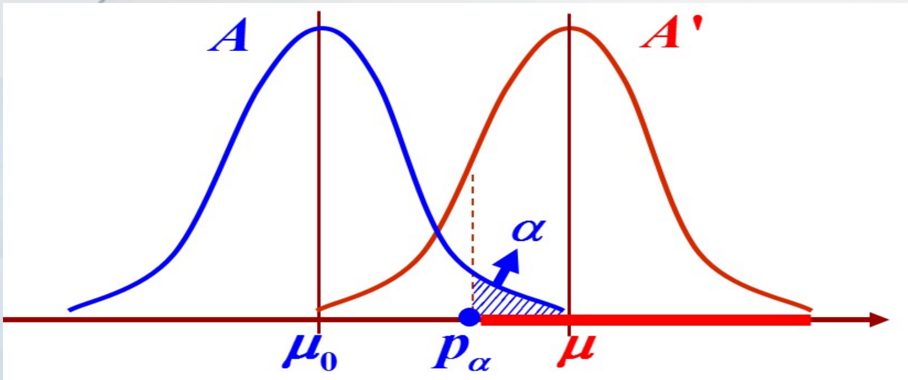
1929
CHONGQING UNIVERSITY

Chapter 1

第8章 假设检验

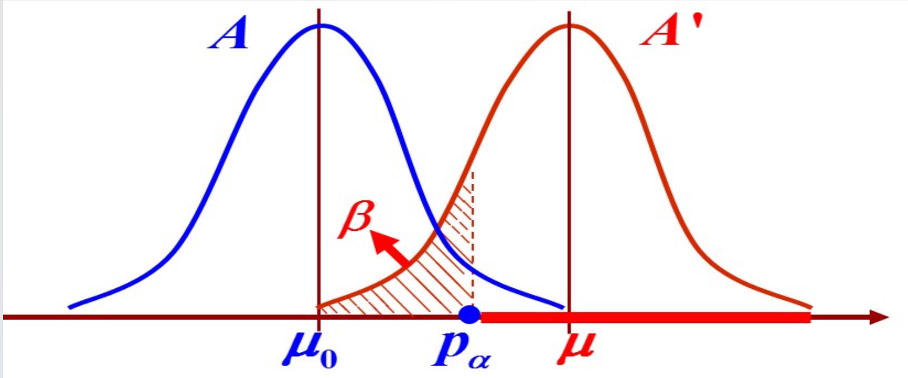
1.1 两类错误

由于抽样的随机性和小概率原理，假设检验所做出的判断可能与事实不符合，出现推断错误。



p_α 为临界点，$\{X > p_\alpha\}$ 即为拒绝域。当 A 为真时，α 小概率事件也有可能发生，即以 α 的概率落入拒绝域内，这时我们作出拒绝正确的假设，称犯第一类错误，弃真错误。

$$\alpha = P\{\mathscr{X}_0 | H_0\}$$

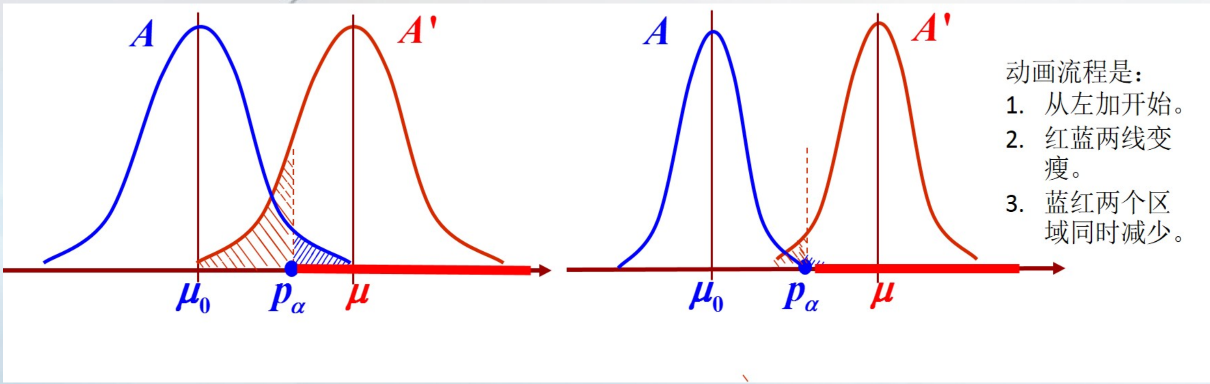


当 A' 为真时，对 A' 的分布，有 β 的概率使样本落入接受域内，作出接受 H_0 的结论，这种错误称为第二类错误，取伪错误。

$$\beta = P\left\{\bar{\mathscr{X}}_0 | H_1\right\}$$

两类错误不能同时减少。除非样本容量 n 增加。

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$



应如何控制两类错误呢？

考虑的问题不同，对两类错误的容许度也不同。

例 1.1.1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，对假设

$$H_0 : \mu = 1, \quad H_1 : \mu = 2$$

H_0 的拒绝域为

$$\mathscr{X}_0 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_9) : \bar{x} > 1.5\}$$

求犯两类错误的概率 α 与 β

解：由于

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/9}} = 3(\bar{X} - \mu) \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\{\mathscr{X}_0 | H_0\} = P\left\{\bar{X} > 1.5 \middle| \mu = 1\right\} \\
&= P\left\{3(\bar{X} - \mu) > 3(1.5 - 1) \middle| \mu = 1\right\} \\
&= 1 - \Phi(1.5) \\
&= 0.0668
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= P\left\{\bar{\mathscr{X}}_0 | H_1\right\} = P\left\{\bar{X} \leq 1.5 \middle| \mu = 2\right\} \\ &= P\left\{3(\bar{X} - \mu) \leq 2(1.5 - 2) \middle| \mu = 2\right\} \\ &= \Phi(-1.5) \\ &= 0.0668\end{aligned}$$

1.1.1 原假设 H_0 与备择假设 H_1 的选取

由上可知，假设检验就是在一个给定的显著水平之下，论证原假设是否显著不成立，即没有相当充分的理由时，我们仍接受原假设。

1. 菜单的分布为 $\mu = 8000$ 是长期以来的总结，新菜单是否真的有作用，那就要看 μ 是否显著增大，于是选

$$H_0 : \mu = 8000, \quad H_1 : \mu > 8000$$

2. 某人有一标重 2.3 克拉的钻石，想托拍卖行拍卖，拍卖行的职工需要在精密天平上将钻石反复称量来判断，几次称量如差别 2.3 克不显著就不敢否定钻石的标重

$$H_0 : \mu = 2.3, \quad H_1 : \mu \neq 2.3$$

如同一个参数，可能有不同的估计量一样；同一个假设，可能会有不同的检验工具。

比如我们要检验餐厅菜单是否有效的问题，可以检验样本均值是否增大，是不是也可以检验9天当中最小值，是否增大？

——— 你可能会说，最小值有点道理，但效果可能不如前者。如何比较两个检验的效果呢？

———比较标准就是两类错误。一个良好的检验方法，应该使得其二类错误都较小。反之，通过两类错误，可以判断检验方法的效果，寻找更好的检验方法。