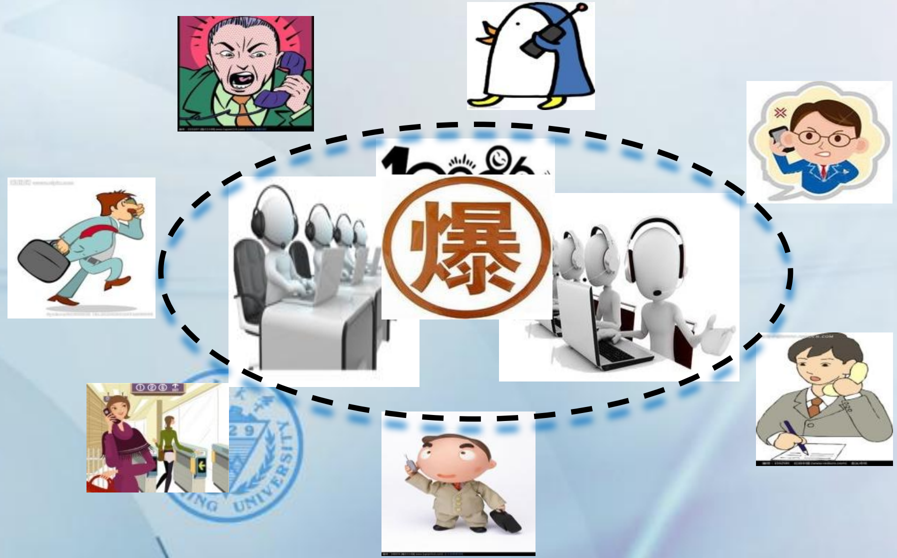
# 泊松分布与泊松定理

教学设计与制作：晋斌

# 提出问题：

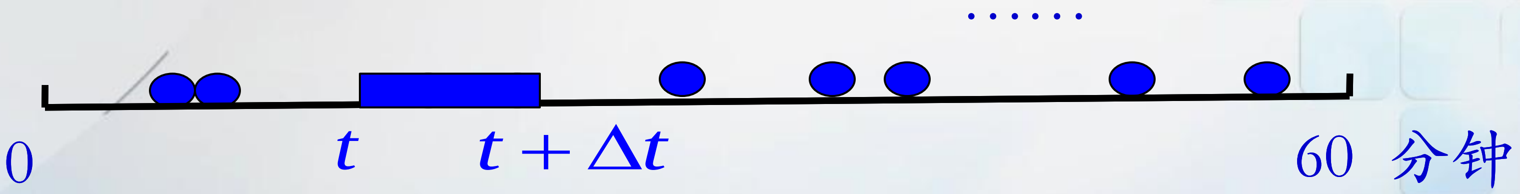
电话服务中心设置多少人员较为合理?




**关键点**　寻求某时间段服务中心来电次数的分布.

二项分布 → 泊松分布

**问题建模：** 对中午12点到13点服务中心的来电次数$X$建模.

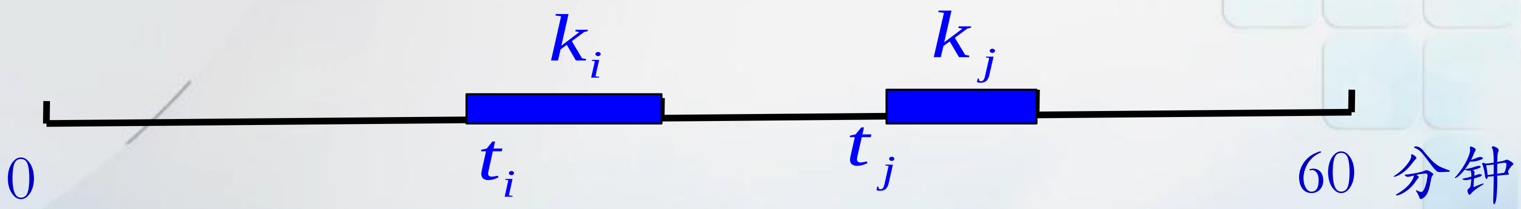



**模型分析：**

**①平稳性：** 在$[t, t+\Delta t]$的来电次数仅与$\Delta t$有关，与$t$无关；


**结论1** 区间i，j长度相同，**来电次数分布相同；**

②**无后效性：** 不相交的时间间隔内的**来电次数彼此独立；**




$$P(区间j上有k_j次来电|区间i上有k_i次来电)$$

$$=P(区间j上有k_j次来电)$$

③**普通性：** 瞬间进2个或2个以上的来电几乎不可能，即仅有0或1次来电；

区间划分足够细时，小区间**来电次数服从0-1分布；**

**n等分:**


平稳性 ⟹ 同分布

无后效性 ⟹ 独 立

普通性 ⟹ 0-1两点分布

***n*重贝努里实验 ⟹ 二项分布*B*(*n*,*p*)**

如何**确定p**？很明显，**p应该是个极限值**

**④有限性：** 在任意有限长的时间内只有有限多次来电。

较短时间段上来电强度可视为定值，可用该时间段的平均来电次数 $\lambda$ 来表征；$n$ 等分后，小区间上的平均来电次数为 $\lambda / n$；$n \to +\infty$ 时小区间来电次数是0-1分布，其平均值等于p。故

$$\mathbf{p} = p = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda}{n}$$

结论：某时间段服务中心来电次数$X$的分布可以用二项分布$B(n,p)$的极限来模拟。

即，“来电次数为$k$”的概率为：

$$P\{X=k\}=p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} C_n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to+\infty}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n\cdot\frac{n-k}{n}}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

二项分布的极限分布

由此，称随机变量$X$服从**泊松分布**，$X$分布律为

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$k=0,1,2\cdots$

$\lambda>0$

记为 $X \sim P(\lambda)$

# 泊松定理

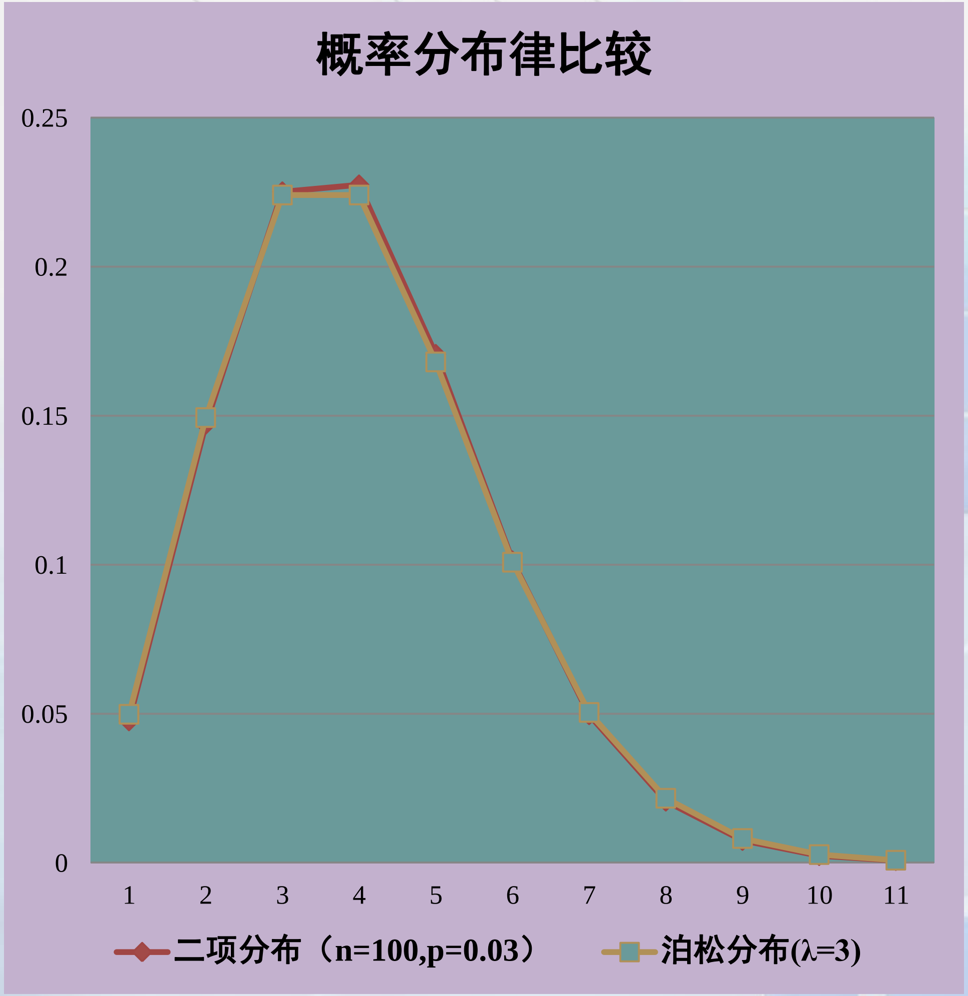
如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$，则

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^{\ k}(1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 0, 1, 2\cdots$$

大的n

小的p



**例（泊松近似）** 每天大约有10000辆车在高速路上行驶，每辆车发生事故的概率为0.0003，假设车与车相互独立，问某天没有发生事故的概率是多少？

解 10000辆车，$n=10000$；有事故/无事故，**两点分布**；

车与车相互独立，**独立**. 则，事故数$X$服从 $\boldsymbol{B(10000，0.0003)}$

$$P\{X=0\}=C_{10000}^{0}0.0003^{0}0.9997^{10000}$$

$$\approx e^{-3}\frac{3^{0}}{0!}$$

泊松近似，$\lambda=np=3$

$$=e^{-3}$$

# 小结

- 泊松分布——二项分布的极限分布
- 泊松定理——对二项分布进行近似